Actas do Encontro de Algebristas Portugueses 2005

Setembro 2005

Editores

Cláudia Mendes Araújo
Suzana Mendes Gonçalves
Paula Mendes Martins
Pedro Patrício

Centro de Matemática da Universidade do Minho - CMAT
2006

Publicado por
Centro de Matemática da Universidade do Minho - CMAT
Universidade do Minho
Campus de Gualtar
4710-057 Braga
PORTUGAL

Actas do Encontro de Algebristas Portugueses 2005
Primeira edição: Julho 2006

ISBN-13: 978-989-95122-0-7
ISBN-10: 989-95122-0-6

Prefácio

Os 16 artigos que constituem este livro de actas baseiam-se em comunicações apresentadas no Encontro de Algebristas Portugueses 2005 - EAP2005.

O EAP2005 realizou-se de 22 a 24 de Setembro, nas instalações da Escola de Ciências da Universidade do Minho, e contou com 49 participantes, vindos de vários pontos do país.

O principal objectivo deste encontro foi fomentar o intercâmbio científico entre os membros de uma comunidade tão vasta e diversificada como é a dos algebristas portugueses.

Foram oradores convidados os Professores *Júlia Vaz de Carvalho* da Universidade Nova de Lisboa, *Maria Fernanda Estrada* do Centro de Matemática da Universidade do Minho, que apresentou uma conferência conjunta com *Maria do Céu Silva* do Centro de Matemática da Universidade do Porto, *Catarina Santa-Clara Gomes* da Universidade de Lisboa, *Maria da Graça Rendeiro Marques* da Universidade do Algarve, *Pedro Ventura Silva* da Universidade do Porto, *Paula Marques Smith* da Universidade do Minho e *Manuela Antunes Sobral* da Universidade de Coimbra. Foi bem notada a ausência do Professor *Graciano Oliveira* da Universidade Lusófona de Lisboa que, por motivos de saúde, não pôde estar presente.

Além das 7 conferências plenárias, foram apresentadas mais 19 comunicações abrangendo áreas diversas da álgebra.

Agradecemos o apoio incondicional do Centro de Matemática da Universidade do Minho - CMAT, através do projecto MaPSe. Agradecemos ainda o apoio do Departamento da Matemática e da Escola de Ciências da Universidade do Minho, da Fundação para a Ciência e Tecnologia, da C.G.D. e do Turismo de Braga.

Não queremos terminar sem deixar aqui um muito obrigado a todos e a cada um dos participantes, com uma referência especial aos oradores convidados, pela sua presença, sem a qual não faria sentido pertencermos à comissão organizadora do EAP2005.

A Comissão Organizadora do EAP2005

Cláudia Mendes Araújo
Suzana Mendes Gonçalves
Paula Mendes Martins
Pedro Patrício

Índice

Prefácio iii

Supercaracteres de grupos finitos unipotentes
*Carlos A. M. André, Ana Carvalho Neto** 1

Super-caracteres de grupos-de-álgebra finitos
*Carlos A. M. André e Alejandro Nicolás** 11

Realizações matriciais de pares de *tableaux* de Young e palavras francas
*O. Azenhas** *e R. Mamede* 19

Álgebras de Lukasiewicz m-generalizadas de ordem n - um "survey"
Júlia Vaz de Carvalho 39

Propriedades assimptóticas das potências de Rees de um módulo
*Ana Luísa Correia** *e Santiago Zarzuela* 53

Valores Próprios de Matrizes com Entradas Prescritas
*Glória Cravo** *e Fernando C. Silva* 65

José Anastácio da Cunha e a Álgebra do seu tempo
*Maria Fernanda Estrada** *e M. do Céu Silva** 73

Uma extensão da representação de Munn e o grau de separação dos idempotentes de um *block-group*
Vítor Hugo Fernandes 105

Inércia de algumas matrizes padrão de sinais simétricas
C. M. da Fonseca 117

Factorização de espectro arbitrário: Caso não-derrogatório
*C.R. Johnson e Yulin Zhang** 131

Classes de operadores (primeiras derivações) com contradomínio numérico elíptico
R. Lemos, N. Bebiano e J. da Providência* 135

Generalizações da álgebra de Weyl–Hayashi e espectro primitivo de $U_q(\mathfrak{g}^+)$
Samuel A. Lopes 155

O problema da palavra para pseudo-semi-reticulados livres
Luís A. Oliveira 175

Sobre as derivações da álgebra 3-Malcev M_8
*Alexandre P. Pojidaev e Paulo Saraiva** 187

Módulos com injectividade fraca
Catarina Santa-Clara 199

Uma abordagem categorial da lógica das implicações
M. Sobral e L. Sousa* 209

Lista de participantes 223

Super Caracteres de Grupos Finitos Unipotentes

Carlos A. M. André[a,c] , Ana Margarida Neto [b,c]

Setembro de 2005

[a] Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Campo Grande, Edifício C6, Piso 2, 1749-016 Lisboa, Portugal, e-mail: caandre@fc.ul.pt
[b] Instituto Superior de Economia e Gestão, Universidade Técnica de Lisboa, Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa, Portugal, e-mail: ananeto@iseg.utl.pt
[c] Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias, Av. Prof. Gama Pinto 2, 1649-003 Lisboa, Portugal

Resumo

A teoria dos super-caracteres foi desenvolvida por C. André para o grupo unitriangular sobre o corpo finito com q elementos. Posteriormente foram também estudados por Ning Yan através de uma abordagem diferente. Seguiremos o trabalho de C. André e Ning Yan para estender as noções de super-carácter aos subgrupos unipotentes maximais dos grupos ortogonal e simplético .

Palavras-chave: super-carácter, grupo ortogonal, grupo simplético.

1 Introdução

Seja p um número primo ímpar e considere-se o corpo finito $\mathbb{F}_q$ com $q = p^e$, $e \geq 1$, elementos. Ao longo deste trabalho, denotaremos por $U_n(q)$ o grupo unitriangular (superior) de grau n sobre $\mathbb{F}_q$; por definição, $U_n(q)$ consiste em todas as matrizes $x \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F}_q)$ que satisfazem $x_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$, e $x_{ij} = 0$ para $1 \leq j < i \leq n$.

Fixado $n \in \mathbb{N}$, G denotará qualquer um dos seguintes grupos finitos clássicos definidos sobre $\mathbb{F}_q$: o grupo simplético $Sp_{2n}(q)$, o grupo ortogonal par $O_{2n}(q)$ ou o grupo ortogonal ímpar $O_{2n+1}(q)$. Seja J a matriz $n \times n$ tal que

$$J_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{se } r+s = n+1, \\ 0, & \text{se } r+s \neq n+1, \end{cases}$$

e, considerando $m = 2n$ se $G = Sp_{2n}(q)$ ou $G = O_{2n}(q)$ e $m = 2n+1$ se $G = O_{2n+1}(q)$, seja $\overline{J}$ a matriz $m \times m$ tal que

$$\overline{J} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{bmatrix}, & \text{se } G = O_{2n}(q) \text{ ou } G = O_{2n+1}(q), \\[2ex] \begin{bmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{bmatrix}, & \text{se } G = Sp_{2n}(q), \end{cases}$$

Com esta notação, cada um dos grupos $Sp_{2n}(q)$, $O_{2n}(q)$ e $O_{2n+1}(q)$ pode ser descrito como o subgrupo G de $GL_m(q)$ tal que

$$G = \{g \in GL_m(q) \colon \; g^T \overline{J} g = \overline{J}\}.$$

Sejam

$$U = U_m(q) \cap G \quad \text{e} \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n(q) \cap \mathfrak{g}$$

onde

$$\mathfrak{g} = \{a \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{F}_q) \colon \; a^T \overline{J} + \overline{J} a = 0\}$$

é a álgebra de Lie associada a G. Além disso, seja $\mathfrak{u}^* = Hom(\mathfrak{u}, \mathbb{F}_q)$ o espaço dual de $\mathfrak{u}$. Por conveniência, usaremos a notação $USp_{2n}(q)$, $UO_{2n}(q)$ ou $UO_{2n+1}(q)$ para nos referirmos ao subgrupo U de $Sp_{2n}(q)$, $O_{2n}(q)$ ou $O_{2n+1}(q)$, respectivamente. Tem-se o seguinte.

Proposição 1.1. (a) $USp_{2n}(q) = \left\{ \begin{bmatrix} x & xz \\ 0 & Jx^{-T}J \end{bmatrix} \in U_{2n}(q) : Jz^T - zJ = 0 \right\}$;

(b) $UO_{2n}(q) = \left\{ \begin{bmatrix} x & xz \\ 0 & Jx^{-T}J \end{bmatrix} \in U_{2n}(q) : Jz^T + zJ = 0 \right\}$;

(c) $UO_{2n+1}(q) = \left\{ \begin{bmatrix} x & xu & xz \\ 0 & 1 & -u^TJ \\ 0 & 0 & Jx^{-T}J \end{bmatrix} \in U_{2n+1}(q) : Jz^T + zJ = -uu^T \right\}$.

Mais, com argumentos sobre a ordem do grupo, podemos demonstrar que cada um dos grupos U aqui definidos é um p-subgrupo de Sylow de G (e também um subgrupo unipotente maximal de G).

Seja T o toro maximal de G consistindo em todas as matrizes diagonais e seja $\Phi = \Phi(G,T)$ o sistema de raízes definido por T. Para cada $1 \leq i \leq n$, seja $\varepsilon_i : \; T \;\; \mapsto \;\; \mathbb{F}_q^\times$ a aplicação definida por $\varepsilon_i(t) = t_{ii}$. Então $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$, onde $\Phi^- = -\Phi^+$ e Φ^+ é como se segue:

(a) Se $G = Sp_{2n}(q)$, então

$$\Phi^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{2\varepsilon_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(b) Se $G = O_{2n}(q)$, então

$$\Phi^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leq i < j \leq n\}.$$

(c) Se $G = O_{2n+1}(q)$, então

$$\Phi^+ = \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\varepsilon_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

O conjunto Φ^+ pode decompôr-se como

$$\Phi^+ = \Phi_1^+ \cup \Phi_2^+ \cup \Phi_3^+,$$

onde

$$\Phi_1^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \colon 1 \leq i < j \leq n\}, \quad \Phi_2^+ = \{\varepsilon_i + \varepsilon_j \colon 1 \leq i < j \leq n\}$$

e

$$\Phi_3^+ = \begin{cases} \{2\varepsilon_i : 1 \leq i \leq n\}, & \text{se } G = Sp_{2n}(q), \\ \emptyset, & \text{se } U = UO_{2n}(q), \\ \{\varepsilon_i : 1 \leq i \leq n\}, & \text{se } G = O_{2n+1}(q). \end{cases}$$

Aos elementos de Φ_1^+ chamamos **raízes de primeiro tipo**, aos elementos de Φ_2^+ **raízes de segundo tipo** e aos elementos de Φ_3^+ **raízes de terceiro tipo**.

2 Super-caracteres

Assumiremos, de agora em diante, que $p \geq m$ o que nos permite definir a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{u} \to U$ por

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^k}{k!} + \ldots + \frac{u^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad u \in \mathfrak{u},$$

e utilizar algumas das suas propriedades.

Consideramos a ordem

$$1 \prec 2 \prec \ldots \prec n \prec 0 \prec -n \prec \ldots \prec -2 \prec -1,$$

e indexamos as linhas (de cima para baixo) e as colunas (da esquerda para a direita) de qualquer matriz segundo esta ordem (sendo que 0 apenas será usado no caso em que $m = 2n + 1$).

A cada $\alpha \in \Phi^+$ associamos o elemento $e_\alpha \in \mathfrak{u}$ definido por

$$e_\alpha = \begin{cases} e_{i,j} - e_{-j,-i}, & \text{se } \alpha \in \Phi_1^+, \\ e_{i,-j} + e_{j,-i}, & \text{se } \alpha \in \Phi_2^+ \text{ e } U = USp_{2n}(q), \\ e_{i,-j} - e_{j,-i}, & \text{se } \alpha \in \Phi_2^+ \text{ e } U \neq USp_{2n}(q), \\ e_{i,-i}, & \text{se } \alpha \in \Phi_3^+ \text{ e } U = USp_{2n}(q), \\ e_{i,0} - e_{0,-i}, & \text{se } \alpha \in \Phi_3^+ \text{ e } U = UO_{2n+1}(q). \end{cases}$$

Prova-se facilmente que $\{e_\alpha : \alpha \in \Phi^+\}$ é uma base de $\mathfrak{u}$ e que, definindo $e_\alpha^* \in \mathfrak{u}^*$ por $e_\alpha^*(e_\beta) = \delta_{\alpha,\beta}$ para todo $\beta \in \Phi^+$, $\{e_\alpha^* : \alpha \in \Phi^+\}$ é uma base de $\mathfrak{u}^*$.

Para $\alpha \in \Phi^+$, definimos o subgrupo U_α de U por:

(a) Se $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Phi_1^+$ para $1 \leq i < j \leq n$, então

$$U_\alpha = \{x \in U \colon x_{ik} = x_{-k,-i} = 0, i \prec k \prec j\}.$$

(b) Se $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j \in \Phi_2^+$ para $1 \leq i < j \leq n$, então

$$U_\alpha = \{x \in U \colon x_{ik} = x_{-k,-i} = 0, x_{j,l} = x_{-l,-j} = 0, i \prec k \preceq n, j \prec l \preceq 0\}.$$

(c) Se $1 \leq i \leq n$ e $\alpha = 2\varepsilon_i \in \Phi_3^+$ (no caso de $U = USp_{2n}(q)$) ou $\alpha = \varepsilon_i \in \Phi_3^+$ (no caso de $U = OSp_{2n+1}(q)$), então

$$U_\alpha = \{x \in U : x_{ik} = x_{-k,-i} = 0, i \prec k \preceq n\}.$$

Fixemos carácter linear não trivial ψ do grupo aditivo $\mathbb{F}_q^+$ de $\mathbb{F}_q$ e, dados $\alpha \in \Phi^+$ e $t \in \mathbb{F}_q$, definamos a aplicação $\lambda_\alpha(t) \colon U_\alpha \to \mathbb{C}$ pela correspondência $\exp(u) \mapsto \psi(te_\alpha^*(u))$. Pela definição de U_α, resulta facilmente que $\lambda_\alpha(t)$ é um homomorfismo de grupos e, portanto, um **carácter linear** de U_α. Chamamos **carácter elementar** de U (associado ao par (α, t)) ao carácter induzido

$$\xi_\alpha(t) = (\lambda_\alpha(t))^U.$$

Agora, a cada $\alpha \in \Phi^+$ associamos o conjunto $\mathcal{E}(\alpha)$ como segue:

$$\mathcal{E}(\alpha) = \begin{cases} \{(i,j), (-j,-i)\}, & \text{se } \alpha \in \Phi_1^+, \\ \{(i,-j), (j,-i)\}, & \text{se } \alpha \in \Phi_2^+, \\ \{(i,-i)\}, & \text{se } G = Sp_{2n}(q) \text{ e } \alpha \in \Phi_3^+, \\ \{(i,0), (0,-i)\}, & \text{se } G = O_{2n+1}(q) \text{ e } \alpha \in \Phi_3^+. \end{cases}$$

Por outro lado, dado um subconjunto Ψ de Φ^+, definimos

$$\mathcal{E}(\Psi) = \bigcup_{\alpha \in \Psi} \mathcal{E}(\alpha)$$

e denotamos por $\mathcal{E}$ o conjunto $\mathcal{E}(\Phi^+)$. Este conceito permite-nos agora definir subconjunto básico de raízes com base na definição dada para o grupo unitriangular. Recordamos que um subconjunto $D_\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ diz-se um subconjunto básico se $D_\mathcal{E}$ contém no máximo um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna de $\mathcal{E}$. Dizemos que $D \subseteq \Phi^+$ é um **subconjunto básico de** Φ^+ se $\mathcal{E}(D)$ fôr um subconjunto básico de $\mathcal{E}$; ou seja, se para todo $1 \preceq k \preceq -1$, tivermos $|\mathcal{E}(D) \cap \{(k,j) \colon 1 \preceq j \preceq -1\}| \leq 1$ e $|\mathcal{E}(D) \cap \{(i,k) \colon 1 \preceq i \preceq -1\}| \leq 1$. Dizemos também que um par (D, φ) é um **par básico** se D fôr um subconjunto básico de Φ^+ e $\varphi \colon D \to \mathbb{F}_q^\times$ fôr uma aplicação de D no grupo multiplicativo $\mathbb{F}_q^\times$ de $\mathbb{F}_q$.

Definição 2.1. *Seja (D, φ) um par básico. Chamamos* **super-carácter** *de U associado ao par (D, φ), e denotamo-lo por $\xi_D(\varphi)$, ao carácter*

$$\xi_D(\varphi) = \prod_{\alpha \in D} \xi_\alpha(\varphi(\alpha)).$$

Por conveniência, se $D = \emptyset$, definimos $\xi_D(\varphi)$ como sendo o carácter unitário 1_U de U.

Temos o seguinte.

Proposição 2.2. *Seja (D, φ) um par básico e $\xi_D(\varphi)$ o super-carácter a ele associado. Seja*

$$U_D = \bigcap_{\alpha \in D} U_\alpha$$

e consideremos a aplicação $\lambda_D(\varphi) \colon U_D \to \mathbb{C}^\times$ definida por

$$\lambda_D(\varphi) = \prod_{\alpha \in D} \lambda_\alpha(\varphi(i,j))_{U_D}.$$

Então, $\lambda_D(\varphi)$ é um carácter linear de U_D e tem-se $\xi_D(\varphi) = \lambda_D(\varphi)^U$.

3 O método das órbitas

No que se segue, e ao longo deste texto, consideraremos as seguintes acções de U em $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u}^*$:

- a **acção adjunta** em $\mathfrak{u}$ definida por $x.u = xux^{-1}$ para todo $x \in U$ e todo $u \in \mathfrak{u}$;
- a **acção coadjunta** em $\mathfrak{u}^*$ definida por $(x \cdot f)(u) = f(x^{-1}ux)$ para todo $x \in U$, todo $f \in \mathfrak{u}^*$ e todo $u \in \mathfrak{u}$.

D. Kazhdan (ver [9] ou [8]) provou que, dada qualquer órbita coadjunta $O \subseteq \mathfrak{u}^*$ (isto é, uma órbita para a acção coadjunta), a função $\chi_O : U \to \mathbb{C}$ definida por

$$\chi_O(exp(u)) = \frac{1}{\sqrt{|O|}} \sum_{f \in O} \psi(f(u)), \qquad u \in \mathfrak{u},$$

é um carácter irredutível de U e, além disso, que todo o carácter irredutível de U é da forma χ_O para alguma órbita coadjunta $O \subseteq \mathfrak{u}^*$; ou seja, a correspodência $O \mapsto \chi_O$ define uma aplicação bijectiva entre U- orbitas em $\mathfrak{u}^*$ e caracteres irredutíveis de U.

No caso do grupo unitriangular, C. André (ver [1] e [2]) provou que qualquer carácter elementar é irredutível e, assim sendo, é da forma χ_O para alguma órbita coadjunta $O \subseteq \mathfrak{u}^*$. Para o grupo U que consideramos vale o seguinte resultado.

Proposição 3.1. *Seja $\alpha \in \Phi^+$ e $t \in \mathbb{F}_q^\times$. Temos:*

(a) *Se $U = USp_{2n}(q)$ ou se $\alpha \in \Phi_1^+ \cup \Phi_3^+$ (em qualquer outro caso), então*

$$\xi_\alpha(t) = \chi_{O_{te_\alpha^*}}.$$

(b) *Se $U = UO_{2n}(q)$ ou $U = UO_{2n+1}(q)$ e $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j \in \Phi_2^+$ temos, para $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Phi_1^+$,*

$$\xi_\alpha(t) = \sum_{s \in \mathbb{F}_q} \chi_{O_{te_\alpha^* + se_\beta^*}}.$$

Em particular, concluímos que todos os caracteres elementares do grupo U são irredutíveis, excepto no caso de U ser o grupo ortogonal e α ser uma raíz de segundo tipo. Neste caso, $\xi_\alpha(t)$, não sendo irredutível, é soma de q caracteres irredutíveis.

Daqui em diante, dados $t \in \mathbb{F}_q$ e $\alpha \in \Phi^+$, denotaremos por $O_\alpha(t)$ o seguinte subconjunto de $\mathfrak{u}^*$:

(a) Se $U = USp_{2n}(q)$ ou $\alpha \in \Phi_1^+ \cup \Phi_3^+$ (em qualquer outro caso), então

$$O_\alpha(t) = O_{te_\alpha^*}.$$

(b) Se $U = UO_{2n}(q)$ ou $U = UO_{2n+1}(q)$ e $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j \in \Phi_2^+$, definimos

$$O_\alpha(t) = \bigcup_{s \in \mathbb{F}_q} O_{te_\alpha^* + se_\beta^*},$$

onde $\beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Phi_1^+$.

Do resultado anterior, obtemos facilmente a fórmula seguinte.

Proposição 3.2. *Seja $\alpha \in \Phi^+$ e $t \in \mathbb{F}_q^\times$. Então,*

$$\xi_\alpha(t)(\exp(u)) = \frac{1}{\sqrt{|O(te_\alpha^*)|}} \sum_{f \in O_\alpha(t)} \psi(f(u)),$$

para todo $u \in \mathfrak{u}$.

Dado um par básico (D, ϕ), definimos

$$O_D^*(\phi) = \sum_{\alpha \in D} O_\alpha(\phi(\alpha))$$

se $D \neq \emptyset$, e $O_D^*(\phi) = \{0\}$ se $D = \emptyset$. Tem-se o seguinte.

Teorema 3.3. *Seja (D, ϕ) um par básico e $O \subseteq \mathfrak{u}^*$ uma U-órbita arbitrária. Então, $\chi_O \in Irr(U)$ é constituinte de $\xi_D(\phi)$ se e só se $O \subseteq O_D^*(\phi)$.*

4 Os conjuntos $O_D^*(\phi)$ e $\mathcal{V}_D^*(\phi)$

Recordemos a ordem $\prec$ definida antes no conjunto $\{0, \pm 1, \ldots, \pm n\}$:

$$1 \prec 2 \prec \ldots \prec n \prec 0 \prec -n \prec \ldots \prec -2 \prec -1.$$

A partir desta uma ordem, definimos a ordem $\prec^*$ no conjunto $\mathcal{E}$ da seguinte forma: para quaisquer $(i, j), (k, l) \in \mathcal{E}$,

$$(i, j) \prec^* (k, l) \iff l \prec j, \text{ ou } l = j \text{ e } i \prec k.$$

Sejam $D_\mathcal{E}$ um subconjunto básico de $\mathcal{E}$ e $(i, j) \in \mathcal{E}$. Denotemos por $D_\mathcal{E}^*(i, j)$ o subconjunto

$$D_\mathcal{E}^*(i, j) = \{(k, l) \in D_\mathcal{E} \colon 1 \preceq k \prec i,\ j \prec l \preceq -1\}$$

de $D_\mathcal{E}$. Suponhamos que $D_\mathcal{E}^*(i, j) = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_t, j_t)\}$ e que os elementos de $D_\mathcal{E}^*(i, j)$ estão ordenados de forma crescente, ou seja, $j_1 \prec j_2 \prec \ldots \prec j_t$. Seja $\sigma \in Sym(t)$ permutação tal que $i_{\sigma(1)} \prec i_{\sigma(2)} \prec \ldots \prec i_{\sigma(t)}$. Então, definimos a função $\Delta_{ij}^{D_\mathcal{E}^*} : \mathfrak{u}_m^*(q) \to \mathbb{F}_q$ por

$$\Delta_{ij}^{D_\mathcal{E}^*}(f) = \begin{vmatrix} f(e_{i_{\sigma(1)},j}) & f(e_{i_{\sigma(1)},j_1}) & \ldots & f(e_{i_{\sigma(1)},j_{t-1}}) & f(e_{i_{\sigma(1)},j_t}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f(e_{i_{\sigma(t)},j}) & f(e_{i_{\sigma(t)}j_1}) & \ldots & f(e_{i_{\sigma(t)},j_{t-1}}) & f(e_{i_{\sigma(t)},j_t}) \\ f(e_{i,j}) & f(e_{i,j_1}) & \ldots & f(e_{i,j_{t-1}}) & f(e_{i,j_t}) \end{vmatrix}$$

para todo $f \in \mathfrak{u}_m^*(q)$. Note-se que, se $D_\mathcal{E}^*(i, j) = \emptyset$, então $\Delta_{ij}^{D_\mathcal{E}}(f) = f(e_{i,j})$.

Por outro lado, dado um subconjunto básico $D_\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ e uma função $\phi \colon D_\mathcal{E} \to \mathbb{F}_q^\times$, definimos o elemento

$$f_{D_\mathcal{E}}(\phi) = \sum_{(i,j) \in D_\mathcal{E}} \phi(i, j) e_{i,j}^*$$

de $\mathfrak{u}_m^*(q)$ e o subconjunto

$$\mathcal{V}_{D_\mathcal{E}}^*(\phi) = \{f \in \mathfrak{u}_m^*(q) \colon \Delta_{ij}^{D_\mathcal{E}}(f) = \Delta_{ij}^{D_\mathcal{E}}(f_{D_\mathcal{E}}(\phi)) \text{ para todo } (i, j) \in R(D_\mathcal{E})\}$$

de $\mathfrak{u}_m^*(q)$. Aqui, $R(D_\mathcal{E}) = \mathcal{E} - S(D_\mathcal{E})$ onde $S(D_\mathcal{E}) = \bigcup_{(i,j) \in D_\mathcal{E}} S(i, j)$ e

$$S(i, j) = \{(i, k) \in \mathcal{E} \colon (i, j) \prec (i, k)\} \cup \{(k, j) \in \mathcal{E} \colon (i, j) \prec (k, j)\}$$

para todo $(i, j) \in \mathcal{E}$.

Dado $f \in \mathfrak{u}^*$, definimos $u(f) \in \mathfrak{u}$ por

$$u(f) = \sum_{\alpha \in \Phi^+} u(f)_\alpha e_\alpha$$

onde, para cada $\alpha \in \Phi^+$,

$$u(f)_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}\, f(e_\alpha), & \text{se } \alpha \in \Phi_1^+ \cup \Phi_2^+, \\ f(e_\alpha), & \text{se } \mathfrak{u} = \mathfrak{usp}_{2n}(q) \text{ e } \alpha \in \Phi_3^+, \\ \frac{1}{2}\, f(e_\alpha), & \text{se } \mathfrak{u} = \mathfrak{uo}_{2n+1}(q) \text{ e } \alpha \in \Phi_3^+. \end{cases}$$

Prova-se facilmente que $f(v) = \mathrm{tr}(u(f)^T v)$ para todo $v \in \mathfrak{u}$, e que a correspondê ncia $f \mapsto u(f)$ define um isomorfismo entre os espaços vectoriais $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{u}^*$.

Posto isto, dado $f \in \mathfrak{u}^*$, definimos $\widehat{f} \in \mathfrak{u}_m^*(q)$ por

$$\widehat{f}(v) = \mathrm{tr}(u(f)^T v), \qquad v \in \mathfrak{u}_m(q),$$

e, dados um subconjunto básico $D \subseteq \Phi^+$ e $(i,j) \in \mathcal{E}$, definimos a função $\Delta_{ij}^D \colon \mathfrak{u}^* \mapsto \mathbb{F}_q^\times$ por

$$\Delta_{ij}^D(f) = \Delta_{ij}^{\mathcal{E}(D)}(\widehat{f}),$$

para todo $f \in \mathfrak{u}^*$. Por outro lado, se (D,ϕ) for um par básico, consideramos o elemento

$$f_D(\phi) = \sum_{\alpha \in D} \phi(\alpha) e_\alpha^*$$

de $\mathfrak{u}^*$ e definimos o subconjunto

$$\mathcal{V}_D^*(\phi) = \{f \in \mathfrak{u}^* \colon \Delta_{ij}^D(f) = \Delta_{ij}^D(f_D(\phi))\text{para todo}(i,j) \in \mathcal{E}_R(D)\}$$

de $\mathfrak{u}^*$. Aqui, $\mathcal{E}_R(D) = \mathcal{E} - \mathcal{E}_S(D)$ onde

$$\mathcal{E}_S(D) = \bigcup_{\alpha \in D} \mathcal{E}_S(\alpha) \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_S(\alpha) = \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{E}(\alpha)} S(i,j).$$

Pode provar-se que este conjunto é U-invariante (isto é, se $f \in \mathcal{V}_D^*(\phi)$, então $x \cdot f \in \mathcal{V}_D^*(\phi)$ para todo $x \in U$) e que, dado $f \in \mathfrak{u}^*$, existe um par básico (D,ϕ) tal que $f \in \mathcal{V}_D^*(\phi)$. Além disso, tem-se o seguinte resultado.

Teorema 4.1. *O subespaço vectorial $\mathfrak{u}^*$ decompõe-se como união disjunta*

$$\mathfrak{u}^* = \bigcup_{D,\phi} \mathcal{V}_D^*(\phi)$$

de todos os subconjuntos U-invariantes $\mathcal{V}_D^*(\phi)$ onde (D,ϕ) é qualquer par básico.

Podemos também demonstrar o seguinte.

Teorema 4.2. *Se (D,ϕ) for um par básico, então $\mathcal{V}_D^*(\phi) = O_D^*(\phi)$.*

Como consequência, deduzimos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 4.3. *Seja χ um carácter irredutível de U e suponhamos que $p \geq m$. Então, χ é constituinte de um e um só super-carácter.*

Demonstração. Seja $O \subseteq \mathfrak{u}^*$ a (única) órbita coadjunta tal que $\chi = \chi_O$. Seja $f \in O$. Pelo Teorema 4.1, sabemos que existe um par básico (D,ϕ) tal que $f \in \mathcal{V}_D^*(\phi)$. Pelo teorema anterior, $f \in O_D^*(\phi)$ e, consequentemente, pelo Teorema 3.3, obtemos $\langle \chi, \xi_{D,\phi} \rangle \neq 0$. Por outro lado, dado $\chi = \chi_O$ carácter irredutível, sejam (D,ϕ) e (D',ϕ') pares básicos tais que $\langle \chi, \xi_{D,\phi} \rangle \neq 0$ e $\langle \chi, \xi_{D'}(\phi') \rangle \neq 0$. Então, novamente pelo Teorema 3.3, temos $O \subseteq O_D^*(\phi) \cap O_{D'}^*(\phi')$ e, portanto, $O \subseteq \mathcal{V}_D^*(\phi) \cap \mathcal{V}_{D'}^*(\phi')$ (pelo Teorema 4.2). Do Teorema 4.1, resulta que $D = D'$ e $\phi = \phi'$, como se queria. $\square$

5 Um exemplo: os caracteres lineares

Seja Π o subconjunto de Φ^+ formado por todas as raízes simples. Por definição, $\alpha \in \Phi^+$ diz-se uma **raíz simples** se não for soma de 2 raízes positivas. Para os grupos que consideramos, temos

$$\Pi = \begin{cases} \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} :\ 1 \leq i < n\} \cup \{2\epsilon_n\}, & \text{se } G = Sp_{2n}(q), \\ \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} :\ 1 \leq i < n\} \cup \{\epsilon_{n-1} + \epsilon_n\}, & \text{se } G = O_{2n}(q), \\ \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} :\ 1 \leq i < n\} \cup \{\epsilon_n\}, & \text{se } G = O_{2n+1}(q). \end{cases}$$

Sabemos que, dado um qualquer grupo finito U, o número de caracteres lineares de U é $|U : U'|$ onde $U' = [U, U]$ é o subgrupo comutador de U. No nosso caso, usando a fórmula dos comutadores de Chevalley (ver [5] ou [6]), é fácil de verificar que

$$U' = \prod_{\alpha \in \Phi^+ \setminus \Pi} X_\alpha.$$

Deste modo, temos $|U : U'| = q^{|\Pi|} = q^n$ e portanto, U tem q^n caracteres lineares.

Comecemos por considerar o caso em que $U = USp_{2n}(q)$ ou $U = UO_{2n+1}(q)$. Em qualquer uma destas situações, Π é um subconjunto básico de raízes e obviamente qualquer seu subconjunto também o é. Mais, para qualquer $D \subseteq \Pi$, temos $U = U_D$, de modo que para qualquer função $\phi : D \to \mathbb{F}_q^\times$, o super-carácter $\xi_D(\phi)$ tem grau $\xi_{D,\phi}(1) = |U : U_D| = 1$ e, portanto, é linear. Por conseguinte, uma vez que a cada par básico está associado um e um só super-carácter, podemos afirmar que U tem pelo menos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (q-1)^k = q^n$$

super-caracteres lineares. Concluímos assim a demonstração do seguinte resultado.

Proposição 5.1. *Suponhamos que $U = Sp_{2n}(q)$ ou $U = O_{2n+1}(q)$, e seja χ um carácter irredutível de U. Então, χ será linear se e só se $\chi = \xi_{D,\phi}$ para algum subconjunto $D \subseteq \Pi$ e alguma função $\phi : D \mapsto \mathbb{F}_q^\times$.*

Suponhamos agora que $U = O_{2n}(q)$. Neste caso, Π não é um subconjunto básico de Φ^+ e, de facto, um subconjunto $D \subseteq \Pi$ será básico se e só se D contiver no máximo uma das raízes $\epsilon_{n-1} - \epsilon_n$ ou $\epsilon_{n-1} + \epsilon_n$.

Seja $D \subseteq \Pi$ tal que $\epsilon_{n-1} + \epsilon_n \notin D$. Temos $U_D = U$ e consequentemente, para toda a função $\phi : D \mapsto \mathbb{F}_q^\times$, o super-carácter $\xi_{D,\phi}$ é linear. Obtemos desta forma,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (q-1)^k = q^{n-1}$$

super-caracteres lineares. Os caracteres lineares que faltam não são super-caracteres como estabelece o seguinte resultado.

Proposição 5.2. *Suponhamos que $U = O_{2n}(q)$ e seja ϑ um carácter irredutível de U. Então, ϑ será linear se e só se ocorrer um dos casos seguintes:*

(a) *$\vartheta = \xi_{D,\phi}$ para algum subconjunto $D \subseteq \Pi - \{\epsilon_{n-1} + \epsilon_n\}$ e alguma função $\phi : D \mapsto \mathbb{F}_q^\times$.*

(b) *ϑ é constituinte do super-carácter $\xi_{\epsilon_{n-1}+\epsilon_n, r}\, \xi_{D,\phi}$ para algum subconjunto $D \subseteq \Pi - \{\epsilon_{n-1} + \epsilon_n, \epsilon_{n-1} - \epsilon_n\}$, alguma função $\phi : D \mapsto \mathbb{F}_q^\times$ e algum elemento $r \in \mathbb{F}_q^\times$.*

Referências

[1] Carlos A. M. André, Basic characters of the unitriangular group, *J. Algebra* **175** (1995), 287-319.

[2] Carlos A. M. André, Basic sums of coadjoint orbits of the unitriangular group, *J. Algebra* **176** (1995), 959-1000.

[3] Carlos André, Basic characters of the unitriangular group (for arbitrary primes), *Proc. Amer. Math. Soc.* **130**,n. 7, (2002), 1943-1954.

[4] S. Mukherjee, Coadjoint orbits for A^+_{n-1}, B^+_n, and D^+_n, disponível em: `http://arXiv.org/pdf/math.RT/0501332`.

[5] R. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Willey and Sons, London, 1972.

[6] R. Carter, *Finite groups of Lie type (conjugacy classes and complex characters)*, John Willey and Sons, New York, 1985.

[7] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Dover Publications, 1994.

[8] B. Srinivasan , *Representations of Finite Chevalley Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol 366, Springer-Verlag, New York-Hiedelberg-Berlin, 1974.

[9] D. Kazhdan, Proof of Springer's hypothesis, *Israel J. Math.* **28**,(1977), 272-286.

Super-caracteres de grupos-de-álgebra finitos

Carlos A. M. André[a] , Alejandro Nicolás[b]

[a] Departamento de Matemática e Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Campo Grande, Edifício C6, Piso 2, 1749-016 Lisboa, e-mail: caandre@fc.ul.pt

[b] Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Oviedo, Calvo Sotelo s/n, 33007 Oviedo, Espanha, e-mail: apnicolas@orion.ciencias.uniovi.es

Resumo

Sejam $\mathbb{F}_q\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre gerada por indeterminada X sobre o corpo finito $\mathbb{F}_q$, e $A = \mathbb{F}_q\langle X\rangle/\mathbb{F}_q\langle X\rangle^n$. Se o radical de Jacobson é $J = J(A)$, então o conjunto $G = 1 + J$ é um subgrupo do grupo das unidades de A.

Neste trabalho constroem-se os supercaracteres do grupo-de-álgebra G quando a característica do corpo é arbitrária e estudam-se as suas principais propriedades.

Em geral, discute-se a generalização destes resultados para o caso em que A é uma álgebra associativa qualquer, não necessariamente livre.

Palavras-chave: álgebra nilpotente, grupo-de-álgebra, supercarácter, superclasse

1 As acções do grupo G

Sejam p um número primo, $q = p^e$ $(e \geq 1)$ uma potência de p e $\mathbb{F}_q$ o corpo finito com q elementos. Seja A uma $\mathbb{F}_q$-álgebra associativa de dimensão finita; em geral, supomos que todas as álgebras têm elemento identidade. Seja $J = J(A)$ o radical de Jacobson de A. Então, o conjunto $G = 1 + J = \{1 + a : a \in J\}$ é um p-grupo das unidades de A que designamos por grupo-de-álgebra (sobre $\mathbb{F}_q$). Um exemplo é o grupo $U_n(q)$ formado por todas as matrizes $n \times n$ unitriangulares sobre o corpo $\mathbb{F}_q$. O propósito deste artigo é estender o conceito de super-caracteres, introduzido por Carlos André [1], [2] e Yan [8] para o caso do grupo $U_n(q)$, a um grupo-de-álgebra geral.

Seja $G = 1 + J$ um grupo-de-álgebra. Tal como em [8], consideramos três acções naturais do grupo G sobre o espaço vectorial J, a saber:

$$\begin{array}{ll} (x, a) \to xa & \textit{acção de transição à esquerda} \\ (a, x) \to ax & \textit{acção de transição à direita} \\ (x, a) \to xax^{-1} & \textit{acção adjunta} \end{array}$$

onde $a \in J$ e $x \in G$. As acções de transição à direita e à esquerda comutam, o que permite definir uma acção dupla do grupo G sobre J: $(x, a, y) \to xay$, para $a \in J$ e $x, y \in G$. Referir-nos-emos a esta acção por *acção de transição*, e designaremos as suas órbitas por *órbitas de transição*; deste modo, uma órbita de transição que contém $a \in J$ é o subconjunto $GaG = \{xay \colon x, y \in G\}$ de J. Notemos ainda que cada órbita de transição é uma união disjunta de órbitas adjuntas.

Por outro lado, o grupo G actua sobre o espaço dual $J^* = Hom_{\mathbb{F}_q}(J, \mathbb{F}_q)$ por meio das acções seguintes:

$$\begin{array}{ll} (xf)(a) = f(ax) & \textit{acção de cotransição à esquerda} \\ (fy)(a) = f(ya) & \textit{acção de cotransição à direita} \\ f^x(a) = f(xax^{-1}) & \textit{acção coadjunta} \end{array}$$

onde $x \in G$, $f \in J^*$ e $a \in J$. Tal como no caso anterior, as acções de cotransição à esquerda e à direita comutam e permitem definir uma acção dupla de G sobre J^*, à qual nos referiremos por *acção de cotransição*. Por definição, temos $(xfy)(a) = f(yax)$, para $x, y \in G$, $f \in J^*$ e $a \in J$; por conseguinte, a órbita de cotransição que contém $f \in J^*$é o subconjunto $GfG = \{xfy \colon x, y \in G\}$ de J^*. Notemos também que cada órbita de cotransição é união disjunta de órbitas coadjuntas.

Prova-se que o centralizador para a acção de cotransição à direita é $C_G^{(r)}(f) = 1 + J_f^{(r)}$ onde $J_f^{(r)} = \{a \in J \mid f(ab) = 0\ \forall b \in J\}$. De igual forma, o centralizador para a acção de cotransição à esquerda é $C_G^{(l)}(f) = 1 + J_f^{(l)}$, onde $J_f^{(l)} = \{a \in J \mid f(ba) = 0\ \forall b \in J\}$. É fácil verificar que os subespaços vectoriais $J_f^{(r)}$ e $J_f^{(l)}$ de J são multiplicativamente fechados. Dados $a \in A$ e $f \in J^*$, definimos os elementos

$af \in J^*$ e $fa \in J^*$ por: $(af)(b) = f(ba)$ para todo $b \in J$, e $(fa)(b) = f(ab)$ para todo $b \in J$. Representaremos por Jf (resp., fJ) o conjunto de todos os elementos $af \in J^*$ (resp., $fa \in J^*$) em que $a \in J$. O lema que se segue garante que Jf (resp., fJ) é o subespaço ortogonal de $J_f^{(r)}$ (resp., $J_f^{(l)}$).

Lema 1.1. *Seja $f \in J^*$. Então $Jf = (J_f^{(r)})^\perp$ e $fJ = (J_f^{(l)})^\perp$. Além disso, tem-se $|J_f^{(r)}| = |J_f^{(l)}|$.*

Como consequência, deduzimos que as órbitas de cotransição à esquerda Gf e à direita fG são os subespaços afins

$$Gf = f + (J_f^{(r)})^\perp \quad \text{e} \quad fG = f + (J_f^{(l)})^\perp.$$

Mais, obtemos $|Gf| = |fG|$.

2 Os super-caracteres de G. Definição e propriedades

Os super-caracteres do grupo $G = 1 + J$ são definidos como caracteres induzidos por certos caracteres lineares de subgrupos de G e, como veremos, estão relacionados com as órbitas de cotransição de G sobre J^*. Começamos por introduzir alguma notação.

Seja ψ um carácter não trivial do grupo aditivo $(\mathbb{F}_q, +)$ e, para cada $f \in J^*$, definamos a aplicação $\psi_f : J \to \mathbb{C}$ por $\psi_f(a) = \psi(f(a))$ para todo $a \in f$. Cada uma destas aplicações é um carácter linear do grupo aditivo $(J, +)$ e, de facto, prova-se que todo carácter irredutível de $(J, +)$ tem esta forma. Por outro lado, dado $f \in J^*$, definimos a aplicação $\lambda_f : G \to \mathbb{C}$ por $\lambda_f(1 + a) = \psi_f(a)$ para todo $a \in J$. É fácil provar que a λ_f define (por restrição) um carácter linear do subgrupo $C_G^{(r)}(f) = 1 + J_f^{(r)}$ de G. Deste modo, podemos considerar o carácter induzido λ_f^G ao qual chamaremos o *super-carácter* de G associado a f.

Embora um super-carácter de G seja definido a partir de um elemento $f \in J^*$, pode provar-se que λ_f^G não depende de f mas sim da órbita de cotransição $\mathbf{\Psi} = GfG$ que contém f. É o que resulta do teorema seguinte.

Teorema 2.1. *Seja $f \in J^*$. Então, o super-carácter de G associado a f é dado por*

$$\lambda_f^G(x) = \frac{|Gf|}{|GfG|} \sum_{g \in GfG} \lambda_g(x) \tag{1}$$

para todo $x \in G$.

Dado que o super-carácter associado a $f \in J^*$ depende apenas da órbita de cotransição de $\mathbf{\Psi} = GfG$, de agora em diante escreveremos $\xi_{\mathbf{\Psi}} = \lambda_f^G$. [Notemos que, embora os super-caracteres se tenham definido usando a acção de cotransição à direita, é fácil justificar que o carácter obtido é o mesmo se se tivesse usado a acção de cotransição à esquerda.]

Da fórmula indicada no teorema anterior resulta imediatamente que os super-caracteres de G constituem um conjunto ortogonal de caracteres.

Teorema 2.2. *Sejam $\mathbf{\Psi}$ e $\mathbf{\Psi}'$ órbitas de cotransição de G em J^*. Então, o produto de Frobenius $\langle \xi_{\mathbf{\Psi}}, \xi_{\mathbf{\Psi}'} \rangle$ é igual a zero, excepto quando $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}'$; neste caso, tem-se*

$$\langle \xi_{\mathbf{\Psi}}, \xi_{\mathbf{\Psi}} \rangle = \frac{\xi_{\mathbf{\Psi}}(1)^2}{|\mathbf{\Psi}|}\,.$$

Como consequência, deduzimos que nem todos os super-caracteres são irredutíveis; de facto, só serão irredutíveis aqueles que verifiquem $\xi_{\mathbf{\Psi}}(1)^2 = |\mathbf{\Psi}|$. O resultado que se segue caracteriza os super-caracteres que cumprem esta propriedade.

Corolário 2.3. *Seja $\mathbf{\Psi} = GfG$ a órbita de cotransição que contém $f \in J^*$. Então, o super-carácter $\xi_{\mathbf{\Psi}}$ será irredutível se e só se $Gf \cap fG = \{f\}$, ou seja, se e só se $(J_f^{(r)})^{\perp} \cap (J_f^{(l)})^{\perp} = \{0\}$.*

Uma segunda consequência do Teorema 2.1 é a de que o carácter regular ρ_G de G se pode decompor como combinação linear, com coeficientes inteiros e positivos, de todos super-caracteres de G.

Teorema 2.4. *Seja $\mathbf{\Psi}(G)$ o conjunto de todas as órbitas de cotransição de G em J^*. Então,*

$$\rho_G = \sum_{\mathbf{\Psi} \in \mathbf{\Psi}(G)} \frac{|\mathbf{\Psi}|}{\xi_{\mathbf{\Psi}}(1)}\, \xi_{\mathbf{\Psi}}\,.$$

Atendendo a que todo o carácter irredutível de G é constituinte do carácter regular ρ_G (com multiplicidade igual ao seu grau), a sua decomposição em super-caracteres e a ortogonalidade entre estes permite concluir o seguinte.

Teorema 2.5. *Qualquer carácter irredutível de G é constituinte de um e de um só super-carácter de G.*

3 Super-caracteres e super-classes. Segunda relação de ortogonalidade

O objectivo desta secção é descrever um resultado análogo, para o caso dos super-caracteres, à segunda relação de ortogonalidade entre caracteres irredutíveis de G. Já observámos que, tal como no caso dos caracteres irredutíveis, também os super-caracteres formam um conjunto de caracteres ortogonais. Além disso, cada carácter irredutível é constituinte de um e de um só super-carácter. No passo seguinte definimos super-classes de G, um conceito que corresponde às classes de conjugação do grupo G. Ora, chamamos *super-classe* de G a qualquer subconjunto de G com a forma $\Phi = 1 + \Psi$ onde $\Psi \subseteq J$ é uma órbita de transição.

É claro que dois elementos $x, y \in G$ pertencem à mesma super-classe Φ se e só se $x - 1$ e $y - 1$ pertencem à mesma órbita de transição $\Psi \subseteq J$. Também é fácil ver que as super-classes são invariantes para a acção adjunta de G, de modo que são união disjunta de classes de conjugação de G.

Relativamente ao número de super-classes, podemos usar o Teorema de Brauer (ver Teorema 6.32 em [6]) para obter o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *O número de super-classes de G é igual ao número de super-caracteres de G.*

Usando a equação (1) segue-se que os super-caracteres de G são constantes nas super-classes de G, pelo que formam uma base ortogonal do espaço vectorial complexo constituído por todas as funções que são constantes nas super-classes de G; referimo-nos a qualquer destas funções por *função de super-classe* de G. Estamos agora em condições de enunciar o resultado correspondente à segunda relação de ortogonalidade.

Teorema 3.2. *Sejam N o número de super-classes (e também de super-caracteres), $\Phi(G) = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_N\}$ o conjunto de todas as super-classes de G e, para cada $1 \le i \le N$, fixemos um representante x_i da super-classe Φ_i. Então,*

$$\sum_{\mathbf{\Psi} \in \mathbf{\Psi}(G)} \langle \xi_{\mathbf{\Psi}}, \xi_{\mathbf{\Psi}} \rangle^{-1} \, \xi_{\mathbf{\Psi}}(x_i) \, \xi_{\mathbf{\Psi}}(x_j) = \frac{|G|}{|\Phi_j|} \, \delta_{i,j}$$

para quaisquer $1 \le i, j \le N$.

Finalmente, observemos que, tal como no caso dos caracteres irredutíveis, podemos definir a tabela de super-caracteres de G como sendo a matriz $(\xi_i(x_j))_{1 \le i,j \le N}$ onde $\mathbf{\Psi}(G) = \{\mathbf{\Psi}_1, \ldots, \mathbf{\Psi}_N\}$ e $\xi_i = \xi_{\mathbf{\Psi}_i}$ para $1 \le i \le N$; os Teoremas 2.2 e 3.2 garantem que as linhas e as colunas desta matriz são ortogonais.

4 Um Exemplo: a álgebra livre com uma indeterminada

Denotemos por $F_q(X)$ a $\mathbb{F}_q$-álgebra livre gerada por um conjunto X e, para qualquer inteiro positivo n, seja $F_q(n, X) = F_q(X)/F_q(X)^n$ a $\mathbb{F}_q$-álgebra nilpotente livre com grau de nilpotência n gerada por X. Considerando um conjunto singular $X = \{x\}$, a álgebra $F_q(n,x) = F_R(n,X)$ identifica-se naturalmente com a $\mathbb{F}_q$-álgebra dos polinómios na indeterminada x com coeficientes em $\mathbb{F}_q$ e de grau menor ou igual a n. É fácil ver que, neste caso, $F_R(n,x) = \mathbb{F}_q 1 + J$ onde $J = \langle x, x^2, \ldots, x^{n-1}\rangle_{\mathbb{F}_q}$ é o radical de Jacobson de $F_R(n,x)$. Sendo assim, o espaço dual J^* de J tem base $\{x^*, (x^2)^*, \ldots, (x^{n-1})^*\}$ onde $(x^i)^*(x^j) = \delta_{i,j}$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Uma vez que os super-caracteres de $G = 1+J$ dependem apenas das órbitas de cotransição de G em J, começamos por caracterizar estas órbitas. Ora, a álgebra $F_R(n,x)$ é comutativa e, portanto, é indiferente considerar a acção de cotransição à esquerda ou à direita; deste modo, escrevemos J_f em vez de $J_f^{(l)} = J_f^{(r)}$. Temos o seguinte.

Proposição 4.1. *Seja*

$$f = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i\,(x^i)^*, \quad \alpha_s \neq 0,$$

um elemento de J^*. Então, $J_f = \langle x^s, x^{s+1}, \ldots, x^{n-1}\rangle_{\mathbb{F}_q}$ e portanto $Gf = \alpha_s(x^s)^* + \langle (x)^*, \ldots, (x^{s-1})^*\rangle$.

Por conseguinte, as órbitas de cotransição de G em J^*, distintas de $\mathbf{\Psi}(0) = \{0\}$, são parametrizadas pelos elementos $\alpha(x^s)^*$ com $\alpha \neq 0$. Sendo assim, obtemos o seguinte.

Corolário 4.2. *O espaço dual J^* é a união disjunta*

$$J^* = \mathbf{\Psi}(0) \cup \left(\bigcup_{1\leq i<n} \bigcup_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \mathbf{\Psi}(\alpha(x^i)^*) \right)$$

onde $\mathbf{\Psi}(f)$ denota a órbita de cotransição que contém o elemento $f \in J^*$.

A partir deste resultado é fácil obter uma fórmula para os super-caracteres.

Corolário 4.3. *Seja $f = \alpha_s(x^s)^* \in J^*$ com $\alpha_s \neq 0$. Então,*

$$\xi_{\mathbf{\Psi}(f)} = \psi_{\alpha_s(x^s)^*} \left(\sum_{g\in\langle x^*,\ldots,(x^{s-1})^*\rangle} \psi_g \right).$$

Por outro lado, tem-se $\xi_{\mathbf{\Psi}(0)} = 1_G$.

Uma vez conhecidas as órbitas de cotransição e os super-caracteres de G, podemos determinar facilmente os que são irredutíveis.

Corolário 4.4. *Os únicos super-caracteres irredutíveis de G são aqueles que estão associados às órbitas de cotransição $\mathbf{\Psi}(\alpha x^*) = \{\alpha x^*\}$ onde $\alpha \in \mathbb{F}_q$ (isto é, são exactamente aqueles que correspondem às órbitas com um só elemento).*

Por outro lado, é também fácil obter a decomposição do carácter regular como soma de super-caracteres.

Proposição 4.5. *Tem-se*

$$\rho_G = \xi_{\mathbf{\Psi}(0)} + \sum_{1\leq i<n} \sum_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \xi_{\mathbf{\Psi}(\alpha(x^i)^*)} \,.$$

Posto isto, descrevemos as super-classes do grupo G. A situação é dual à das órbitas de cotransição.

Proposição 4.6. *Seja*

$$a = \sum_{1\leq j\leq t} \alpha_j x^j \in J, \quad \alpha_t \neq 0,$$

um elemento de J. Então, a super-classe que contém $1+a \in G$ é

$$\Phi(1+a) = 1 + \alpha_t x^t + \langle x^{t+1}, \dots, x^{n-1}\rangle.$$

Deste modo, as super-classes não-triviais são parametrizadas pelos elementos $1 + \alpha x^t$ em que $\alpha \neq 0$, o que permite decompor o grupo G como se segue.

Corolário 4.7. *O grupo G é a união disjunta*

$$G = \Phi(1) \cup \left(\bigcup_{1\leq i<n} \bigcup_{\alpha\in\mathbb{F}_q^*} \Phi(1+\alpha x^i) \right)$$

onde $\mathbf{\Psi}(g)$ denota a super-classe que contém o elemento $g \in G$.

Por último, sabendo que os super-caracteres são constantes nas super-classes, podemos calcular os valores de qualquer super-carácter.

Teorema 4.8. *Seja $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}(\alpha(x^s)^*) \subseteq J^*$ uma órbita de cotransição de G. Então, para qualquer $\beta \in \mathbb{F}_q$, tem-se*

$$\xi_{\mathbf{\Psi}}(1+\beta x^t) = \begin{cases} 0, & \textit{se } s < t, \\ q^{s-1}\psi(\alpha\beta), & \textit{se } s = t, \\ q^{s-1}, & \textit{se } s > t. \end{cases}$$

Referências

[1] C. A. M. André, Basic Characters of the Unitriangular Group, *J. Algebra* **175**, 287-319 (1995).

[2] C. A. M. André, Basic Sums of Coadjoint Orbits of the Unitriangular Group, *J. Algebra* **176**, 959-1000 (1995).

[3] C. A. M. André, Irreducible characters of finite algebra groups, *Textos Mat. Sér. B*, **19**, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1999, pp 65-80.

[4] E. Arias-Castro, P. Diaconis, R. Stanley, A super-class walk on upper-triangular matrices, *J. Algebra* **278**, 739-765 (2004).

[5] Z. Halasi, On the characters and commutators of finite algebra groups, *J. Algebra* **275**, 481-487, (2004)

[6] I. M. Isaacs, *Character Theory of Finite Groups*, Academic Press (1976).

[7] I. M. Isaacs, Characters of Groups Associated with Finite Algebras *J. Algebra* **177**, 708-730 (1995).

[8] N. Yan, Representation theory of the finite unipotent linear group, *preprint*, Deparment of Mathematics, University of Pennsylvania, 2001.

Realizações matriciais de pares de *tableaux* de Young e palavras francas

O. Azenhas[a] e R. Mamede[b]

[a]Universidade de Coimbra, e-mail: oazenhas@mat.uc.pt

[b]Universidade de Coimbra, e-mail: mamede@mat.uc.pt

Resumo

Neste artigo determinamos uma condição necessária para a existência de uma realização matricial, sobre um domínio local de ideais principais, de um par $(T, K(\sigma))$ de tableaux de Young, onde T é um *tableau* enviesado, no alfabeto $[t]$, e $K(\sigma)$ é a chave associada a uma permutação $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$, com o peso de T. Mostramos que o par $(T, K(\sigma))$ tem uma realização matricial só se a palavra de T pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$. Mostra-se ainda que a palavra de T pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$ se e só se a palavra formada pelos conjuntos indexantes de T é franca.

Palavras-chave: chave, monóide pláxico, palavra franca, realização matricial, tableau de Young.

1 Introdução

Sejam $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$, e $K(\sigma)$ uma chave associada. Isto é, $K(\sigma)$ é um *tableau* com colunas comparáveis para a inclusão, que se obtém tomando uma sequência de factores à esquerda de σ, considerada como palavra no alfabeto $[t]$, ordenados por ordem decrescente [19]. Dado um par $(T, K(\sigma))$ de tableaux de Young, onde T é um *tableau* enviesado, no alfabeto $[t]$, e $K(\sigma)$ é a chave associada a σ com o peso de T, consideramos o problema da existência de uma realização matricial, sobre um domínio local de ideais principais, para o par $(T, K(\sigma))$.

Quando σ é a permutação identidade, este problema corresponde à interpretação matricial do chamado *problema de Green-Klein.* Mais precisamente, J. A. Green [12] e T. Klein [14] determinaram um conjunto de condições necessárias e suficientes para a existência de módulos de torsão finitamente gerados $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, sobre um domínio de ideais principais, com factores invariantes prescritos e tais que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{B} = \mathcal{C}/\mathcal{A}$. A análise deste problema reduz-se ao caso local, *i.e.*, ao caso em que apenas um domínio local é considerado.

Em [2, 6], é introduzido o conceito de realização matricial para o par de *tableaux* $(T, K(id))$, e é apresentada uma prova matricial para o problema de Green-Klein. Mais precisamente, $(T, K(id))$ tem uma realização matricial se e só se T é um *tableau* de Littlewood-Richardson. (Em [1] é apresentada uma outra realização matricial usando uma definição diferente de *tableau* de Littlewood-Richardson.) Isto equivale a dizer que $(T, K(id))$ tem uma realização matricial se e só se a palavra de T pertence à classe de Knuth da chave $K(id)$ com o peso de T. O conceito de realização matricial de pares de *tableaux* é então generalizado [2, 3, 4] para qualquer permutação $\sigma \in \mathcal{S}_t$, $t \geq 1$. Em [2, 4], é resolvido o problema da existência de uma realização matricial para o par $(T, K(\sigma))$, quando σ é a permutação reversão em $\mathcal{S}_t$, $t \geq 1$, e em [8], o problema é completamente resolvido para qualquer permutação $\sigma \in \mathcal{S}_3$. Em [3, 20] é tratado o problema de uma transposição. Em todos estes casos, o par $(T, K(\sigma))$ possui uma realização matricial se e só se a palavra do *tableau* enviesado T pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$.

Um *tableau* enviesado T pode ser descrito quer pela sua palavra $w(T)$, quer pelos seus conjuntos indexantes, *i.e.*, os conjuntos formados pelas posições que as letras de $w(T)$ ocupam na representação planar de T. A noção de conjuntos indexantes de um *tableau* enviesado foi introduzida em [2, 6]. Estes conjuntos foram caracterizados para algumas permutações σ tais que $w(T)$ está na classe de Knuth duma chave $K(\sigma)$ [3, 4, 5, 8, 20]. Utilizando o conceito de palavra franca, introduzido por A. Lascoux e M. P. Schützenberger em [19], provamos que a palavra $w(T)$ pertence à classe de Knuth da chave $K(\sigma)$ com o peso de T se e só se a palavra formada pelos conjuntos indexantes de T é franca. Esta dualidade entre a palavra e os conjuntos indexantes do *tableau* enviesado, bem como algumas propriedades das palavras francas, são utilizadas para generalizar a condição necessária, dos resultados mencionados acima, a qualquer permutação $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$. Em [9] é caracterizada uma família de elementos numa classe de Knuth de uma chave para a qual esta condição também é suficiente.

2 Variações do *jeu de taquin* e palavras francas

Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos com a ordem usual "$\leq$". Dado $t \in \mathbb{N}$, denotamos por $[t]^*$ o monóide livre gerado pelo alfabeto $[t] := \{1, \ldots, t\}$, *i.e.*, o conjunto de todas as palavras finitas sobre o alfabeto $[t]$, munido da operação concatenação. O elemento neutro é a palavra vazia.

Uma palavra $v = x_1 \cdots x_k \in [t]^*$ é dita uma *coluna* se $x_1 > \cdots > x_k$. Neste caso, v é representada planarmente numa coluna com as letras por ordem decrescente do topo para baixo. Por exemplo, $\begin{array}{c}5\\2\\1\end{array}$ é a representação planar da coluna 521. Seja V_t o conjunto de todas as colunas de $[t]^*$. (Quando o alfabeto for irrelevante, omitimos o índice t na notação V_t e escrevemos apenas V). Qualquer palavra $w \in [t]^*$ admite uma factorização única como o produto de um número minimal de colunas: $w = v_1 v_2 \cdots v_r$, $v_i \in V_t$, chamada *factorização por colunas* de w, sendo v_1 a *coluna esquerda* $L(w)$ de w, e v_r a *coluna direita* $R(w)$ de w. Esta factorização será representada algumas vezes por $v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_r$. O *formato* de w é a sequência $\|w\| = (|v_1|, \ldots, |v_r|)$, formada pelos comprimentos $|v_i|$ das colunas de w, sendo o *peso* de w definido pela sequência $(|w|_1, \ldots, |w|_t)$, onde $|w|_i$ designa o número de letras i existentes em w. Por exemplo, se $w = 5214421 \in [5]^*$, a sua factorização por colunas é dada por $w = \begin{array}{ccc}5 & & \\ 2 & & \\ 1 & 4 & 4 \\ & & 2 \\ & & 1\end{array}$. É claro que $\|w\| = (3, 1, 3)$, e o peso de w é dado pela sequência $(2, 2, 0, 2, 1)$. Note que podemos escrever w como um produto de 4 colunas $w = \begin{array}{cccc}5 & & & \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ & & & 2 \\ & & & 1\end{array}$. Mas, neste caso, a sequência dos comprimentos das colunas $(2, 1, 1, 3)$ não é o formato de w, pois não estamos perante uma factorização por colunas. É claro que se $w = w_1 \cdots w_q$ $(w_i \in V_t)$, então $r \leq q$, tendo-se igualdade apenas se esta for a factorização por colunas.

Os conjuntos subjacentes das colunas de V_t definem uma bijecção $v \to \{v\}$ entre o conjunto V_t das colunas de $[t]^*$ e o conjunto potência $2^{[t]}$ de $[t]$. Tendo em conta esta bijecção, um elemento de $2^{[t]}$, ordenado por ordem decrescente, pode ser visto como uma coluna de V_t. Esta bijecção permite-nos estender a V_t a relação de ordem $\leq$, definida em $2^{[t]}$ pondo $B \leq A$ se e só se existe uma injecção crescente i de B em A tal que $b \leq i(b)$ para todo $b \in B$. Uma tal injecção pode ser visualizada dispondo os elementos de A numa coluna, por ordem decrescente do topo para baixo, e seguidamente colocando os elementos de B à esquerda das suas imagens.

Exemplo 2.1. Consideremos as colunas $v = 431 \leq u = 65421 \in [6]^*$. Em baixo representamos graficamente três diferentes injecções crescentes de $\{v\} = \{4,3,1\}$ em $\{u\} = \{6,5,4,2,1\}$:

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ & 2 \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ & 5 \\ 3 & 4 \\ & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\ . \tag{1}$$

Definimos outra relação de ordem $\triangleright$ em $2^{[t]}$, e estendemo-la a V_t, pondo $B \triangleright A$ se e só se existe uma injecção crescente i de A em B tal que $i(a) \leq a$ para todo $a \in A$. Tal como anteriormente, tal injecção pode ser visualizada dispondo os elementos de B numa coluna, ordenada por ordem decrescente do topo para baixo, e seguidamente colocando os elementos de A à direita das suas imagens.

Exemplo 2.2. Sejam agora $v = 54321 \triangleright u = 542$. Os diagramas seguintes representam três injecções crescentes distintas de $\{u\} = \{6,4,2\}$ em $\{v\} = \{5,4,3,2,1\}$.

$$\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 4 & 4 \\ 3 & \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}\ . \tag{2}$$

Se $A, B \subseteq [t]$ têm o mesmo cardinal, é claro que $B \leq A$ se e só se $B \triangleright A$.

As ordens acabadas de caracterizar permitem-nos apresentar as definições de *tableau* e *contretableau*. Assim, uma palavra $w = v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_r \in [t]^*$ é dita um *tableau* se $v_1 \triangleright v_2 \triangleright \cdots \triangleright v_r$. Se as suas colunas satisfazem $v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_r$, w diz-se um *contretableau*. Por exemplo, as palavras $6431\,62\,4 = \begin{array}{ccc} 6 & & \\ 4 & & \\ 3 & 6 & \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$ e $54321\,642 = \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{array}$ são *tableaux*, enquanto que as palavras $1\,32\,654 = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \\ & 2 & 5 \\ & & 4 \end{array}$

e $431\,65421 = \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ & 2 \\ & 1 \end{array}$ são *contretableaux*. Um *tableau* é dito *standard* se não tiver letras repetidas.

Uma *partição* é uma sequência de inteiros não negativos $a = (a_1, a_2, \ldots)$, todos nulos à excepção de um número finito e tais que $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$ O número $|a| = \sum_i a_i$ é dito o *peso* de a e o valor máximo de i para o qual $a_i > 0$ é chamado o *comprimento* de a. Se o comprimento e o peso de a são zero, temos a partição nula $a = (0, 0, \ldots)$. Se $a_i = 0$ para $i > k$, escreveremos também $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Por vezes, é conveniente utilizar a notação $a = (a_1^{m_1}, \ldots, a_k^{m_k})$, onde $a_1 > \cdots > a_k$ e $a_i^{m_i}$, com $m_i \geq 0$, significa que a_i aparece m_i vezes como parte de a. Notemos que toda a partição se pode escrever na forma $a = (t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ para algum inteiro positivo t. A *partição conjugada* de a é então definida como sendo a partição $(\sum_{i=1}^{t} l_i, \ldots, l_{t-1} + l_t, l_t)$. Por outro lado, sendo $\sigma \in S_t$ e escrevendo $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $i = 1, \ldots, t$, tem-se $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1}) = \sum_{i=1}^{t} (1^{m_{\sigma(i)}})$.

Claramente, o formato de um *tableau* é sempre uma partição. No exemplo acima, o formato do *tableau* $6431\,62\,4$ é a partição $(4, 2, 1) = (4^1, 3^0, 2^1, 1^1) = (1^1) + (1^2) + (1^3) + (1^1)$, sendo a sua partição conjugada dada por $(3, 2, 1, 1) = (3^1, 2^1, 1^2)$.

Um *tableau enviesado*, no alfabeto $[t]$, [18] é um *tableau* sobre o alfabeto $[t] \cup \{\emptyset\}$, onde a letra extra $\emptyset$ satisfaz

$$\emptyset < \emptyset < 1 < 2 \cdots < t.$$

Por exemplo, $T = 32\emptyset\,2\emptyset\,31\,2\,2$ é um *tableau* enviesado no alfabeto $[3]$, com formato $(3, 2, 2, 1, 1)$, e a sua representação planar é dada por

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & & & \\ 2 & 2 & 3 & & \\ \emptyset & \emptyset & 1 & 2 & 2 \end{array} \quad . \tag{3}$$

A palavra $w(T)$ de um *tableau* enviesado T, no alfabeto $[t]$, é a palavra em $[t]^*$ obtida eliminando de T a letra $\emptyset$. O peso de T é definido como sendo o peso da palavra $w(T)$. Em (3), temos $w(T) = 3223122$ e o peso de T é dado por $(1, 4, 2)$. Note-se que toda a palavra pode ser vista como a palavra de um *tableau* enviesado. Por exemplo, o *contretableau* $1\,32\,654$ é a palavra do *tableau* enviesado

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 6 \\ \emptyset & 2 & 5 \\ \emptyset & \emptyset & 4 \end{array} .$$

Dado um *tableau* enviesado T, seja

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \cdots & \pi_k \\ u_1 & \cdots & u_k \end{pmatrix} \tag{4}$$

a bi-palavra onde a linha inferior é $w(T) = u_1 \cdots u_k$, e a linha superior $\pi_1\pi_2 \cdots \pi_k$ é tal que $\pi_1 \leq \pi_2 \leq \cdots \leq \pi_k$ com π_j o índice da coluna, contado da esquerda para a direita, da letra u_j em T, $1 \leq j \leq k$. A bi-letra $\begin{pmatrix} \pi_j \\ u_j \end{pmatrix}$ significa que a letra u_j está situada na coluna π_j de T. Para $i \in \{1, \ldots, t\}$, seja $J_i = \{y_1^i > \cdots > y_{m_i}^i\}$ o conjunto formado pelos índices das colunas das letras i em T. Identificamos J_i com a coluna $y_1^i \cdots y_{m_i}^i$. Os conjuntos $J_1, \ldots, J_t$ são ditos os *conjuntos indexantes* de T, e como acabámos de ver, cada J_i, $i = 1, \ldots, t$, indica as posições, segundo o índice das colunas, das letras i de $w(T)$ na representação planar de T. Reordenando as bi-letras em (4), por ordem não crescente das letras na segunda linha, obtemos a bi-palavra

$$\begin{pmatrix} J_t & \cdots & J_2 & J_1 \\ t^{m_t} & \cdots & 2^{m_2} & 1^{m_1} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

onde $\begin{pmatrix} J_i \\ i^{m_i} \end{pmatrix}$ representa a bi-palavra com linha inferior a palavra i^{m_i} e linha superior a coluna J_i.

Um *tableau* enviesado determina então um único conjunto de bi-letras, mas não uma única bi-palavra. Por exemplo, se ordenarmos as bi-letras do *tableau* enviesado (3), por ordem não decrescente das letras na primeira linha, ou por ordem não crescente das letras da segunda linha, obtemos, respectivamente, as bi-palavras

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,2\,3\,3\,4\,5 \\ 3\,2\,2\,3\,1\,2\,2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 3\,1\,5\,4\,2\,1\,3 \\ 3\,3\,2\,2\,2\,2\,1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

A segunda linha da bi-palavra à esquerda em (6) indica a palavra do *tableau* enviesado (3), enquanto que a primeira linha da bi-palavra à direita em (6) indica os conjuntos indexantes desse *tableau* enviesado.

Dado $J \subseteq [t]$, definimos a função característica de J pondo $(\chi^J)_i = 1$, se $i \in J$, e $(\chi^J)_i = 0$, caso contrário. Dado um *tableau* enviesado T com bi-palavra (5), podemos associar-lhe uma sequência de partições $(a^0, a^1, \ldots, a^t)$ pondo $a^0 := (a_1^0, \ldots, a_n^0)$ a partição definida pelo formato da palavra obtida eliminando de T as letras de $[t]$, e $a^i := a_{i-1} + \chi^{J_i}$, $i = 1, \ldots, t$. É claro que cada $a^i = (a_1^i, \ldots, a_n^i)$ é também uma partição e satisfaz

$$a_k^i \leq a_k^{i+1} \leq a_k^i + 1, \tag{7}$$

para $i = 0, 1, \ldots, t-1$, e $k = 1, \ldots, n$. Reciprocamente, qualquer sequência de partições $(a^0, a^1, \ldots, a^t)$ satisfazendo (7) origina um *tableau* enviesado T de formato a^t, com bi-palavra definida pelos conjuntos $J_i = \{k : a^i_k = a^{i-1}_k + 1\}$, $i = 1, \ldots, t$. Por exemplo, o *tableau* enviesado (3) é definido pela sequência de partições $T = (a^0, \ldots, a^4)$, onde $a^0 = (1, 1, 0, 0, 0), a^1 = (1, 1, 1, 0, 0), a^2 = (2, 2, 1, 1, 1)$ e $a^3 = (3, 2, 2, 1, 1)$.

A congruência de Knuth $\equiv$ [15] sobre palavras no alfabeto $[t]$ é a congruência gerada pelas transformações elementares seguintes, onde x, y e z são letras em $[t]$:

$$xzy \equiv zxy, \quad x \leq y < z, \tag{8}$$

$$yzx \equiv yxz, \quad x < y \leq z. \tag{9}$$

Estas relações (8),(9), também designadas por relações *pláxicas*, são a versão algébrica da congruência *pláxica* [11, 15, 17, 16] obtida utilizando o algoritmo de inserção de Schensted [23].

Teorema 2.1. (a) *Cada classe pláxica contém um e um só tableau* T.

(b) *As palavras congruentes com* T *estão em bijecção com os tableaux standard com o mesmo formato de* T.

Dada $w \in [t]^*$, designamos por $P(w)$ o único *tableau* congruente com w. Tal *tableau* pode ser obtido a partir de w utilizando quer o algoritmo de inserção de Schensted [23], quer o algoritmo de deslizamento de Schützenberger [11, 17, 18, 22], também designado por *jeu de taquin*.

Teorema 2.2. *Sejam* T *e* Q *dois tableaux enviesados. Então,* $w(T) \equiv w(Q)$ *se e só se* T *se obtém de* Q *aplicando o jeu de taquin.*

Uma palavra w_1 diz-se uma *sub-palavra* de $w = x_1 \cdots x_k \in [t]^*$ se existem inteiros $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq k$ tais que $w_1 = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$. Dizemos que duas sub-palavras $w_1 = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ e $w_2 = x_{j_1} \cdots x_{j_s}$ de $w = x_1 \cdots x_k$ são disjuntas se os conjuntos $\{i_1, \ldots, i_r\}$ e $\{j_1, \ldots, j_s\}$ são disjuntos.

Dado $w \in [t]^*$, seja $l(w, k)$ o máximo da soma dos comprimentos de k sub-palavras decrescentes e disjuntas de w. De forma semelhante, designemos por $l'(w, k)$ o máximo da soma dos comprimentos de k sub-palavras não decrescentes e disjuntas de w. Por exemplo, as sub-palavras não decrescentes de comprimento máximo de $w = 5214421$ são 244 e 144, donde $l'(w, 1) = 3$. Claramente, $l'(w, 2) = 5$, pois a soma dos comprimentos das sub-palavras 244 e 12 representa o máximo da soma dos comprimentos de 2 sub-palavras não decrescentes de w. Temos $l'(w, 3) = 6$ e $l'(w, 4) = 7$. A sub-palavra decrescente de comprimento máximo de w é 5421, pelo que $l(w, 1) = 4$. É fácil verificar que $l(w, 2) = 6$ e $l(w, 3) = 7$.

Estes números não são modificados pelas transformações de Knuth, sendo designados por *invariantes de Greene* [13]. Seja $a = (a_1, \ldots, a_s)$ o formato de $P(w)$ e $a' = (a'_1, \ldots, a'_l)$ a partição conjugada. O teorema seguinte, provado por C. Greene em [13], dá-nos uma interpretação combinatória para os comprimentos das colunas e das linhas de um *tableau.* (Veja-se também [11, 16].)

Teorema 2.3. *Para $k = 1, \ldots, s$, $a_k = l(w,k) - l(w,k-1)$, e para $k = 1, \ldots, l$, $a'_k = l'(w,k) - l'(w,k-1)$, com $l(w,0) = l'(w,0) = 0$.*

Sejam $u, v \in V_t$ tais que $v \cdot u$ é um *tableau* ou *contretableau*, e fixemos uma injecção i como anteriormente, mas tal que a sua imagem contenha $\{u\} \cap \{v\}$. Consideremos a representação planar de $v{\cdot}u$ de acordo com a injecção i, colocando o símbolo $\blacksquare$ nas posições não numeradas, da coluna das pré-imagens, isto é, nas posições horizontalmente adjacentes aos elementos que não estão na imagem de i. Por exemplo, consideremos o *contretableau* $431 \cdot 65421$ apresentado no exemplo 2.1, e notemos que a imagem da primeira injecção definida em (1) não contém todos os elementos comuns às duas colunas. Consideremos, então, a segunda injecção i, com imagem $i(v) = \{1, 4, 6\}$:

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \blacksquare & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\ . \tag{10}$$

Designemos por Θ a operação de deslizamento horizontal em $v{\cdot}u$, que consiste em deslizar horizontalmente as letras que não estão na imagem de i, para as posições com o símbolo $\blacksquare$, adjacentes, aparecendo, deste modo, o símbolo $\blacksquare$ nas posições deixadas vagas. Por exemplo, considerando a injecção definida em (10), temos

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \blacksquare & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 5 & \blacksquare \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array}\ . \tag{11}$$

Algebricamente, considerando $v \leq u$ e $\Theta(v \cdot u) = v' \cdot u'$, temos $\{v'\} = \{v\} \cup (\{u\} \setminus i(v))$ e $\{u'\} = i(v)$. É claro que $v' \rhd u'$, pois a aplicação j, definida por $j(b) = a$ se e só se $i(a) = b$, é uma injecção crescente de u' em v' com $i(b) \leq b$ para $b \in \{u'\}$, e, além disso, a sua imagem $j(u') = v$ contém os elementos comuns a v' e u'. As colunas v, u podem agora ser recuperadas efectuando a operação de deslizamento horizontal no sentido oposto, definida pela injecção j,

$\Theta(v' \cdot u') = v \cdot u$. Voltando à injecção definida em (10), temos

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ \blacksquare & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 5 & \blacksquare \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{cc} 5 & \blacksquare \\ 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta}{\longrightarrow} \quad \begin{array}{cc} \blacksquare & 5 \\ 4 & 6 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \tag{12}$$

Se a injecção i considerada para definir a operação Θ for tal que a sua imagem satisfaz $i(v) \leq \iota(v)$, no caso do *contretableau* $v \cdot u$, ou $\iota(u) \leq i(u)$, no caso do *tableau* $v \cdot u$, para qualquer outra injecção crescente ι, denotamos esta operação por Θ^*. Graficamente, isto significa, no caso do *contretableau* [respectivamente, *tableau*], que as letras de v [respectivamente, u] estão situadas, o mais baixo [respectivamente, acima] possível, à esquerda da coluna u [respectivamente, à direita da coluna v], de tal modo que a condição " $\leq$ " na horizontal seja preservada. Considerando novamente o *contretableau* $431 \leq 65421$, facilmente se conclui que a terceira injecção apresentada em (1) está nas condições requeridas.

É fácil verificar que a operação Θ^* aplicada ao *tableau* ou *contretableau* $v \cdot u$ coincide com a aplicação do *jeu de taquin* a $v \cdot u$. Por exemplo, aplicando Θ^* ao *contretableau* $431 \cdot 65421$, temos

$$\begin{array}{cc} \blacksquare & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \overset{\Theta^*}{\longleftrightarrow} \quad \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} , \tag{13}$$

enquanto que os passos sucessivos da aplicação do *jeu de taquin* ao *contretableau* $431 \cdot 65421$, são:

$$\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 5 \\ \blacksquare & 4 \\ 1 & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} \blacksquare & 6 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ \blacksquare & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ \blacksquare & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & \blacksquare \\ 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{cc} 6 & \blacksquare \\ 4 & \blacksquare \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{array} .$$

Embora as palavras $\Theta(v \cdot u)$ e $\Theta^*(v \cdot u)$ tenham o mesmo formato, não são congruentes. Contudo, ambas são *tableaux* ou *contretableaux*, e satisfazem $L(\Theta^*(vu)) \geq L(\Theta(vu))$ e $R(\Theta^*(vu)) \leq R(\Theta(vu))$.

Mais geralmente, seja $v_t \cdot v_{t-1} \cdot \ldots \cdot v_1$ a factorização por colunas de $w \in [t]^*$. Para $i = 1, \ldots, t-1$, definimos $\Theta_i^*(w)$ como sendo a palavra obtida de w substituindo as colunas $v_{i+1}v_i$ por $\Theta^*(v_{i+1}v_i)$, sempre que $v_{i+1}v_i$ é um *tableau* ou um *contretableau*. Assim, e tendo em conta o teorema 2.2, concluímos que $w \equiv \Theta_i^*(w)$. No entanto, $\Theta_i^*(w)$ pode já não ser uma palavra com t colunas. Por exemplo, $\Theta_2^*(7 \cdot 762 \cdot 4) = 762 \cdot 74$. Veremos seguidamente que se o formato de $w = v_t \cdot v_{t-1} \cdot \ldots \cdot v_1$ for uma permutação do formato de $P(w)$, $\Theta_i^*(w)$ ainda é uma palavra com t colunas.

No conjunto das sequências finitas de inteiros positivos, podemos definir uma relação de pré-ordem, pondo $a \leq b$ se e só se para cada $k > 0$, a soma das k maiores entradas de a é menor ou igual do que a soma das k maiores entradas de b. Claro que se $a \leq b$ e $b \leq a$, então a é uma permutação de b.

Dada uma sequência de inteiros positivos $a = (a_1, \ldots, a_r)$, definimos a palavra $aM := (a_1 \cdots 1) \cdot (a_1 + a_2 \cdots a_1 + 1) \cdots ((a_1 + \cdots + a_r) \cdots (a_1 + \cdots + a_{r-1} + 1))$ com formato a. Por exemplo, $(2,1,4)M = 21 \cdot 3 \cdot 7654$ tem formato $(2,1,4)$.

Lema 2.4. *Seja $w = v_1 \cdot \ldots \cdot v_r$ $(v_i \in V)$ uma palavra. Então:*

(a) $\|w\| \leq \|P(w)\|$;

(b) $\|w\|$ é uma permutação de $\|P(w)\|$ sse $\|w\|M$ é uma palavra de inserção de w.

Demonstração: Veja-se [19]. $\square$

Por exemplo, $(4,2,1)M = \begin{array}{ccc} 4 & & \\ 3 & & \\ 2 & 6 & \\ 1 & 5 & 7 \end{array}$ é o tableau de inserção de $\begin{array}{ccc} 5 & & \\ 3 & & \\ 2 & 4 & \\ 1 & 1 & 3 \end{array}$

enquanto que $(2,4,1)M = \begin{array}{ccc} 2 & 6 & \\ 1 & 5 & \\ & 4 & \\ & 3 & 7 \end{array}$ é uma palavra de inserção de $\begin{array}{ccc} 3 & 5 & \\ 1 & 4 & \\ & 2 & \\ & 1 & 3 \end{array}$ e

$(2,1,4)M = \begin{array}{ccc} 2 & & \\ 1 & 3 & 7 \\ & & 6 \\ & & 5 \\ & & 4 \end{array}$ é uma palavra de inserção de $\begin{array}{ccc} 3 & & \\ 1 & 2 & 5 \\ & & 4 \\ & & 3 \\ & & 1 \end{array}$.

Como consequência das alíneas (b) do lema anterior e do teorema 2.1, obtemos

Teorema 2.5 (A. Lascoux, M.P. Schützenberger, [19])**.** *Seja T um tableau com formato $i = (i_1, \ldots, i_r)$. Para cada permutação j de i, existe uma e uma só palavra $w \equiv T$ com formato j. Estas palavras designam-se por palavras francas.*

Portanto, uma palavra $w \in [t]^*$ é franca se e só se o seu formato é uma permutação do formato do *tableau* $P(w)$. Em particular, todo o *tableau* e *contre-tableau* são palavras francas. As palavras francas duma classe pláxica estão em bijecção com o conjunto das permutações do formato do *tableau* nessa classe. Ou seja, as palavras francas são completamente determinadas pelo seu formato.

Pelo lema 2.4 (b), cada factor $v_{i+1} \cdot v_i$ de uma palavra franca $w = v_t \cdot \ldots \cdot v_2 \cdot v_1$ é ainda uma palavra franca. Além disso, visto as operações Θ^* preservarem a congruência pláxica, por 2.4 (a) concluímos que $\|\Theta_i^* w\|$ é uma permutação de $\|w\|$. Portanto, as operações Θ^* podem ser utilizadas para obter todas as palavras francas congruentes com um determinado *tableau*. Por exemplo, a classe pláxica do *tableau* $5321\,41\,3$ contém as seis palavras francas seguintes, as quais correspondem às seis permutações do formato $(4, 2, 1)$:

$$
\begin{tikzcd}
& \begin{array}{ccc}1&5&\\&3&\\&2&4\\&1&3\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\Theta_2^*"] & \begin{array}{ccc}5&&\\3&&\\2&&\\1&1&4\\&&3\end{array} \arrow[dr, leftrightarrow, "\Theta_1^*"] & \\
\begin{array}{ccc}1&3&5\\&2&4\\&&3\\&&1\end{array} \arrow[ur, leftrightarrow, "\Theta_1^*"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\Theta_2^*"'] & & & \begin{array}{ccc}5&&\\3&&\\2&4&\\1&1&3\end{array} \\
& \begin{array}{ccc}3&&\\1&2&5\\&&4\\&&3\\&&1\end{array} \arrow[r, leftrightarrow, "\Theta_1^*"'] & \begin{array}{ccc}3&5&\\1&4&\\&2&\\&1&3\end{array} \arrow[ur, leftrightarrow, "\Theta_2^*"'] &
\end{tikzcd} \tag{14}
$$

Note-se que o hexágono fecha porque estas são todas as palavras francas congruentes com $5321\,41\,3$.

O próximo teorema permite-nos averiguar se a concatenação de duas palavras francas é ainda uma palavra franca.

Teorema 2.6 (A. Lascoux, M. P. Schützenberger, [19])**.** *A concatenação de duas palavras francas w, w' é franca se e só se $R(u).L(u')$ é franca para qualquer par de palavras francas u, u' tal que $u \equiv w$ e $u' \equiv w'$.*

Note-se que se $w, w' \in V$, ww' é franca se e só se ww' é *tableau* ou *contretableau*. Como consequência do resultado anterior, obtemos o seguinte critério para o caso em que adicionamos uma coluna à esquerda de uma palavra franca.

Corolário 2.7. [7] *Sejam $w = v_1 \cdots v_k$ uma palavra franca e $v \in V$. Então, vw é franca se e só se as palavras vv_1 e $\overline{v}_1 v_2 \cdots v_k$ são francas, onde $\overline{v}\,\overline{v}_1 = \Theta^*(vv_1)$.*

Demonstração: A condição é claramente necessária. Provemos então a suficiência. Comecemos por notar que vw é a concatenação das palavras francas vv_1 e $v_2 \cdots v_k$. Além disso, as únicas palavras francas congruentes com vv_1 são a própria e

$\overline{v}\,\overline{v}_1 = \Theta^*(vv_1)$. Como $\overline{v}_1 v_2 \cdots v_k$ e $v_1 v_2 \cdots v_k$ são francas, o mesmo se passa com $\overline{v}_1 L(u)$ e $v_1 L(u)$, para qualquer palavra franca $u \equiv v_2 \cdots v_k$. Pelo teorema anterior, podemos concluir que vw é franca. $\square$

O critério dado pelo corolário anterior pode ser generalizado para operações Θ.

Corolário 2.8. [7] *Sejam $w = v_1 \cdots v_k$ uma palavra franca e $v \in V$. Então, vw é franca se e só se as palavras vv_1 e $\widetilde{v}_1 v_2 \cdots v_k$ são francas, onde $\widetilde{v}\,\widetilde{v}_1 = \Theta(vv_1)$ para alguma operação Θ.*

Demonstração: A condição necessária é consequência do teorema anterior. Suponhamos então a existência de uma operação Θ nas condições do enunciado, e seja $\overline{v}\,\overline{v}_1 = \Theta^*(vv_1)$. É claro que $\overline{v}_1 \leq \widetilde{v}_1$. Equivalentemente, $\overline{v}_1 \triangleright \widetilde{v}_1$, uma vez que $|\overline{v}_1| = |\widetilde{v}_1|$.

Por hipótese, para qualquer palavra franca $u \equiv v_2 \cdots v_k$, o produto $\widetilde{v}_1 L(u)$ é uma palavra franca. Isto significa que $\widetilde{v}_1 \leq L(u)$ ou $\widetilde{v}_1 \triangleright L(u)$. Por transitividade, concluímos que também $\overline{v}_1 \leq L(u)$ ou $\overline{v}_1 \triangleright L(u)$, *i.e.*, $\overline{v}_1 L(u)$ é franca. Assim, pelo teorema anterior, $\overline{v}_1 v_2 \cdots v_k$ é franca e, pelo corolário anterior, a palavra vw é franca. $\square$

3 Palavras francas, chaves e palavras de σ-Yamanouchi

Uma *chave* é um *tableau* cujas colunas são comparáveis para a inclusão. O *tableau* representado em baixo é um exemplo de uma chave:

$$T = \begin{array}{llll} 5 & & & \\ 3 & & & \\ 2 & 5 & 5 & \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{array} . \tag{15}$$

Enquanto as palavras francas são completamente determinadas pelo seu formato, as chaves são completamente determinadas pelo seu peso.

Dado $(m_1, \ldots, m_t)$, $m_i \geq 0$, a chave com este peso é o tableau $(0, (1^{m_1}), (1^{m_1}) + (1^{m_2}), \ldots, \sum_{i=1}^{t}(1^{m_i}))$. Este é o único *tableau* com formato $\sum_{i=1}^{t}(1^{m_i})$ e peso $(m_1, \ldots, m_t)$. Ou ainda, a chave de peso $(m_1, \ldots, m_t)$ é o tableau com esse peso e formato o conjugado da partição $(m_{\sigma(1)}, \cdots, m_{\sigma(t)})$, para algum $\sigma \in \mathcal{S}_t$. No exemplo acima, T é a única chave com peso $(3, 1, 1, 0, 4)$. Ou seja, é o tableau $(0, (1^3), (1^3) + (1), (1^3) + (1) + (1), (1^3) + (1) + (1) + (1^4))$.

A cada par constituído por uma permutação $\sigma \in S_t$ e por uma sequência de inteiros não negativos $(l_t, l_{t-1}, \ldots, l_1)$, Ehresmann [10] associou a chave, aqui denotada por $K(\sigma,(l_t,\ldots,l_1))$, pondo

$$K(\sigma,(l_t,\ldots,l_1)) := v_t^{l_t} v_{t-1}^{l_{t-1}} \cdots v_1^{l_1},$$

onde v_i é a coluna formada pelas primeiras i letras de σ, considerando σ como uma palavra no alfabeto $[t]$, $1 \leq i \leq t$. Esta chave é o tableau com formato $(t^{l_t},\ldots,2^{l_2},1^{l_1})$ e peso $(m_1,\ldots,m_t)$ tais que $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \leq i \leq t$.

Por outro lado, a chave com peso $(m_1,\ldots,m_t)$ pode ser escrita na forma $K(\sigma,(l_t,\ldots,l_1))$ para alguma permutação $\sigma \in S_t$ e sequência de inteiros não negativos $(l_t,\ldots,l_1)$, tais que $(t^{l_t},\ldots,2^{l_2},1^{l_1})$ é o conjugado da partição $(m_{\sigma(1)}, \cdots, m_{\sigma(t)})$, *i.e.*, $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \leq i \leq t$.

Portanto, a chave com peso $(m_1,\ldots,m_t)$ pode ser parametrizada por uma sequência de inteiros não negativos $(l_t,\ldots,l_2,l_1)$ e por uma permutação $\sigma \in S_t$ tais que $(t^{l_t},\ldots,2^{l_2},1^{l_1})$ é o conjugado da partição $(m_{\sigma(1)}, \cdots, m_{\sigma(t)})$.

Por exemplo, a chave (15) é a chave associada à permutação $\sigma = 51324 \in S_5$ e à sequência $(0,1,0,2,1)$,

$$K(\sigma,(0,1,0,2,1)) = (54321)^0(5321)^1(531)^0(51)^2 5^1 = 5321\,51\,51\,5.$$

Note-se que o formato da chave é $(4,2,2,1) = (4^1,3^0,2^2,1^1)$ a partição conjugada de $(4,3,1,1)$, a partição que se obtém do peso $(3,1,1,0,4)$ permutando as entradas segundo σ.

Quando não houver ambiguidade quanto à multiplicidade das colunas de uma chave, escreveremos apenas $K(\sigma)$ para designar uma chave associada à permutação σ.

Definição 3.1. Uma palavra $w \in [t]^*$ é dita de σ-Yamanouchi se $w \equiv K(\sigma)$, para alguma permutação $\sigma \in S_t$.

(Note-se que a multiplicidade das colunas de $K(\sigma)$ é determinada pelo peso de w, que é um invariante da sua classe de Knuth.)

Quando σ é a identidade, w é dita apenas palavra de Yamanouchi. Equivalentemente, w é de Yamanouchi se e só se todo o factor à direita v de w satisfaz $|v|_1 \geq |v|_2 \geq \cdots \geq |v|_t$.

Existe uma relação estreita entre palavras francas e as palavras da classe de Knuth de uma chave. De facto, a toda a palavra franca de formato $(m_t,\ldots,m_1)$ corresponde uma palavra na classe de Knuth da chave com peso $(m_1,\ldots,m_t)$. Seja então $w = J_t \cdots J_2 J_1 \in [r]^*$, $(J_i \in V_r)$, uma palavra franca com formato $\|w\| = (m_t,\ldots,m_1)$ e $\sigma \in S_t$ tal que $(m_{\sigma(1)},\ldots,m_{\sigma(t)})$ é o formato do *tableau* $P(w)$. Seja $(l_t,\ldots,l_1)$ uma sequência de inteiros não negativos tal que $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \leq i \leq t$. O conjugado do formato de $P(w)$ é, como sabemos, $(t^{l_t},\ldots,2^{l_2},1^{l_1})$. Suponhamos ainda que w se obtém do seu *contretableau* congruente aplicando $\Theta_{i_1}^* \cdots \Theta_{i_q}^*$. Como Θ_i^* actua sobre as colunas $i+1, i$, a contar da direita para a esquerda, concluímos que $\sigma := s_{i_1} \cdots s_{i_q} \in S_r$, onde s_i designa a transposição $(i\, i+1)$.

Consideremos a bi-palavra

$$\begin{pmatrix} J_t & \cdots & J_2 & J_1 \\ t^{m_t} & \cdots & 2^{m_2} & 1^{m_1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

onde cada factor $\begin{pmatrix} J_k \\ k^{m_k} \end{pmatrix}$ tem a coluna J_k como primeira linha e a palavra k^{m_k}, constituída por m_k repetições da letra k, como segunda linha. Reordenemos as bi-letras de (16), de modo a que na primeira linha as letras cresçam, com repetição permitida, da esquerda para a direita, e tal que em cada factor $\begin{pmatrix} i \cdots i \\ u_i \end{pmatrix}$, a palavra u_i na linha inferior seja uma coluna:

$$\begin{pmatrix} J_t & \cdots & J_2 & J_1 \\ t^{m_t} & \cdots & 2^{m_2} & 1^{m_1} \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \cdots 1 & 2 \cdots 2 & \cdots & r \cdots r \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_r \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Proposição 3.1. *Seja $w = J_t \cdots J_2 J_1 \in [r]^*$, $(J_i \in V_r)$, uma palavra franca com formato $(m_t, \ldots, m_1)$ e $\sigma \in S_t$ tal que $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(t)})$ é uma partição. A palavra $u := u_1 u_2 \cdots u_r \in [t]^*$, $(u_i \in V_t)$, obtida na segunda linha da bi-palavra à direita em (17), é congruente com a chave $K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$, onde $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \le i \le t$.*

Demonstração: Tendo em conta a definição de u, é claro que o seu peso é dado por $(m_1, \ldots, m_t)$. Provemos que o formato do *tableau* $P(u)$ é a partição conjugada do formato de $P(w)$, isto é, $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ com $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{t} l_k$, $1 \le i \le t$.

Para tal, comecemos por observar que se w' é uma sub-palavra não decrescente de w, esta é necessariamente constituída por uma só letra de cada coluna de w. Por sua vez, a correspondente sub-palavra u' formada na segunda linha da bi-palavra à direita em (17) é decrescente, e é ainda uma sub-palavra de u. Reciprocamente, a toda a sub-palavra decrescente de u corresponde na primeira linha da bi-palavra à esquerda em (17) uma sub-palavra não decrescente de w. É claro que a transformação em (17) estabelece uma correspondência bijectiva entre as sub-palavras não decrescentes de w e as sub-palavras decrescentes de u. Concluímos assim que $l(u,k) = l'(w,k)$, para $k = 1, \ldots, s$, e pelo teorema 2.3, $\|P(u)\| = (t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$.

Existe um e um só *tableau* com formato $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ e peso $(m_1, \ldots, m_t)$, onde $m_{\sigma(i)} = \sum_{k=i}^{r} l_k$, $1 \le i \le t$, para algum $\sigma \in S_t$. Esse *tableau* é precisamente a chave $K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$. Logo, $u \equiv P(u) = K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$. $\square$

Portanto, uma palavra franca de formato $(m_t, \ldots, m_1)$ tal que $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(t)})$ é uma partição, dá origem pela transformação (17) a uma palavra de σ-Yamanouchi com peso $(m_1, \ldots, m_t)$. Reciprocamente, toda a palavra congruente com a chave com peso $(m_1, \ldots, m_t)$ dá origem, pela transformação (17), a uma palavra franca com formato $(m_t, \ldots, m_1)$.

Proposição 3.2. *Seja $u = u_1 \cdots u_r$, $(u_i \in V_t)$, uma palavra na classe de congruência da chave com peso $(m_1, \ldots, m_t)$. Então, a palavra $w = J_t \cdots J_2 J_1$, obtida na primeira linha da bi-palavra à esquerda em (17), é franca com formato $(m_t, \ldots, m_1)$.*

Demonstração: É claro que o formato de w é $(m_t, \ldots, m_1)$. Além disso, seguindo a demonstração do lema anterior, concluímos que o formato de $P(w)$ é $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(t)})$, o conjugado do formato $(t^{l_t}, \ldots, 2^{l_2}, 1^{l_1})$ de $K(\sigma, (l_t, \ldots, l_1))$. $\square$

No entanto, a factorização $u = u_1 u_2 \cdots u_t$ considerada em (17) não é, necessariamente, a factorização por colunas de u. Assim, uma palavra $u \equiv K(\sigma)$ pode originar várias palavras francas, todas com o mesmo formato, dependendo da decomposição por colunas efectuada. Por exemplo, o *tableau* 21.31.1 origina a correspondência

$$\begin{pmatrix} 21\ 31\ 1 \\ 33\ 22\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 111\ 2\ 3 \\ 321\ 3\ 2 \end{pmatrix}.$$

Claro que $u := u_1 u_2 u_3$, com $u_1 = 321, u_2 = 3$ e $u_3 = 2$, não é a factorização por colunas de u. Já a factorização por colunas $u = 321.32$ dá origem à palavra franca 21.21.1.

Notemos ainda que a transformação (17) foi a transformação utilizada para obter as bi-palavras (4) e (5) de um *tableau* enviesado T. Assim, temos

Teorema 3.3. *Seja T um tableau enviesado com conjuntos indexantes $J_1, \ldots, J_t$, e seja $\sigma \in S_t$ tal que $|J_{\sigma(1)}| \geq \cdots \geq |J_{\sigma(t)}|$ é uma partição. Então, $w(T)$ é de σ-Yamanouchi se e só se a palavra $J_t \cdots J_1$ é franca.*

Tomemos como exemplo o *tableau* enviesado (3), com palavra $w(T) = 3223122$ e conjuntos indexantes $J_3 = \{3, 1\}, J_2 = \{5, 4, 2, 1\}$ e $J_1 = \{3\}$. Sendo $(|J_2|, |J_3|, |J_1|) = (4, 2, 1)$ uma partição, considere-se $\sigma = 231 = s_1 s_2$, $l_3 = l_2 = 1$ e $l_1 = 2$. Como vimos em (14), $J_3 J_2 J_1$ é uma palavra franca com formato $(2, 4, 1)$ e $\Theta_2^* \Theta_1^* (J_3 J_2 J_1)$ é um *contretableau*. Efectuando a transformação (17),

$$\begin{pmatrix} 31\,5421\,3 \\ 33\,2222\,1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 11\,2\,33\,4\,5 \\ 32\,2\,31\,2\,2 \end{pmatrix},$$

concluímos que $w(T) = 3223122$ é de s_1s_2-Yamanouchi com peso $(1,4,2)$. De facto, temos

$$P(w(T)) = K(s_1s_2,(1,1,2)) = \begin{array}{llll} 3 & & & \\ 2 & 3 & & \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array},$$

com formato $(3,2,1^2)$, o conjugado de $(4,2,1)$.

4 Realizações matriciais de pares de tableaux

Seja $\mathcal{R}_p$ um domínio local de ideais principais com ideal maximal (p). As matrizes que vamos considerar são todas não singulares $n \times n$ com entradas sobre $\mathcal{R}_p$; por $\mathcal{U}_n$ designamos o grupo das matrizes unimodulares sobre $\mathcal{R}_p$.

Dadas matrizes A e B, dizemos que B é *equivalente à esquerda* a A, $(B \sim_E A)$, se $B = UA$ para alguma matriz $U \in \mathcal{U}_n$; B é *equivalente à direita* a A, $(B \sim_D A)$, se $B = AV$ para alguma matriz $V \in \mathcal{U}_n$; e B é *equivalente* a A, $(B \sim A)$, se $B = UAV$ para algumas matrizes $U, V \in \mathcal{U}_n$. As relações $\sim_E, \sim_D$ e $\sim$ são relações de equivalência no conjunto das matrizes de ordem n sobre $\mathcal{R}_p$.

Seja A uma matriz $n \times n$ não singular. Pela forma normal de Smith [21], existem inteiros não negativos $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ tais que A é equivalente a

$$diag(p^{a_1}, \ldots, p^{a_n}).$$

A sequência $a = (a_1, \ldots, a_n)$ dos expoentes, por ordem decrescente, da forma normal de Smith de A é uma partição, univocamente determinada pela matriz A, a que chamaremos *partição invariante* de A.

Dada uma sequência de inteiros não negativos $f_1, \ldots, f_n$, usamos a seguinte notação para matrizes diagonais de potências de p:

$$diag_p(f_1, \ldots, f_n) = diag(p^{f_1}, \ldots, p^{f_n}).$$

Dado $m \in [n]$, designamos por $D_{[m]}$ a matrix $diag_p(1^m, 0^{n-m})$, e dada uma sequência $(m_1, \ldots, m_t)$ de inteiros não negativos, pomos

$$D_{(m_1,\ldots,m_t)} := (D_{[m_1]}, \ldots, D_{[m_t]}).$$

A sequência $(0, (1^{m_1}), \ldots, \sum_{i=1}^t (1^{m_i}))$ das partições invariantes das matrizes I, $D_{[m_1]}, D_{[m_1]}D_{[m_2]}, \ldots, \prod_{i=1}^t D_{[m_i]}$, define o único *tableau* com formato $\sum_{i=1}^t (1^{m_i})$ e peso $(m_1, \ldots, m_t)$. Ou seja, a chave de peso $(m_1, \ldots, m_t)$.

Definição 4.1. Sejam $T = (a^0, a^1, \ldots, a^t)$ um *tableau* enviesado, com comprimento de $a^t \leq n$ e peso $(m_1, \ldots, m_t)$, e $\sigma \in S_t$ tal que $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(t)})$ é uma partição. Dado $U \in \mathcal{U}_n$, a sequência de matrizes não singulares

$$\left(diag_p(a^0)U, D_{(m_1,\ldots,m_t)}\right)$$

é dita uma realização matricial do par $(T, K(\sigma))$ se para cada $k = 1, \ldots, t$,

$$diag_p(a)UD_{[m_1]} \ldots D_{[m_k]} \sim diag_p(a^k).$$

Neste caso, $(T, K(\sigma))$ é dito um par admissível.

O próximo resultado relaciona os conjuntos indexantes dos *tableaux* enviesados realizados pelas sequências $\Big(diag_p(a)U, D_{(m_1,m_2)}\Big)$ e $\Big(diag_p(a)U, D_{(m_2,m_1)}\Big)$ no alfabeto [2].

Proposição 4.1. [3, 8] *Sejam $m_1 \geq m_2$ dois inteiros não negativos, a uma partição de comprimento $\leq n$ e $U \in \mathcal{U}_n$. Sejam $(T, K(id))$ e $(T', K(s_1))$, com $s_1 = (1\ 2)$, os pares de tableaux realizados pelas sequências $\Big(diag_p(a)U, D_{(m_1,m_2)}\Big)$ e $\Big(diag_p(a)U, D_{(m_2,m_1)}\Big)$, respectivamente. Então, $J_2 \cdot J_1$ é a palavra dos conjuntos indexantes de T se e só se $\Theta(J_2 \cdot J_1)$ é a palavra dos conjuntos indexantes de T', para alguma operação Θ.*

Como foi referido na introdução, quando σ é a identidade ou a permutação reversão em S_t, ou qualquer permutação em S_3, o par $(T, K(\sigma))$ é admissível se e só se a palavra de T pertence à classe pláxica da chave $K(\sigma)$. O próximo teorema generaliza a condição necessária destes resultados para qualquer permutação $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$.

Teorema 4.2. *Seja $\sigma \in S_t$, $t \geq 1$. O par $(T, K(\sigma))$ é admissível só se $w(T) \equiv K(\sigma)$.*

Demonstração: Sejam $J_1, \ldots, J_t$ os conjuntos indexantes de T. Vamos provar, por indução sobre $t \geq 1$, que a palavra $J_t \cdots J_1$ é franca. Quando $t = 1$ o resultado é trivial e o caso $t = 2$ já foi provado [3, 8]. Consideremos então $t > 2$ e seja $\Big(diag_p(a)U, D_{(m_1,\ldots,m_t)}\Big)$ uma realização matricial de $(T, K(\sigma))$. Por indução, a palavra $J_{t-1} \cdots J_1$ é franca, pois a sequência $\Big(diag_p(a)U, D_{(m_1,\ldots,m_{t-1})}\Big)$ realiza um par (T', K'), onde T' tem conjuntos indexantes $J_1, \ldots, J_{t-1}$, e K' é a chave com peso $(m_1, \ldots, m_{t-1})$.

Pela forma normal de Smith, existe uma partição a' e uma matrix unimodular U' tais que $diag_p(a)UD_{[m_1]} \cdots D_{[m_{t-2}]} \sim_L diag_p(a')U'$. A sequência $\Big(diag_p(a')U', D_{(m_{t-1},m_t)}\Big)$ realiza um par $(\overline{T}, \overline{K})$, onde $\overline{T}$ tem conjuntos indexantes J_{t-1}, J_t, e $\overline{K}$ é a chave com peso (m_{t-1}, m_t). Pelo caso $t = 2$, a palavra $J_t J_{t-1}$ é franca. Além disso, pela proposição anterior, podemos concluir que se $(\overline{T}', \overline{K}')$ é o par realizado pela sequência $\left(diag_p(a')U, D_{(m_t,m_{t-1})}\right)$, os conjuntos indexantes $\overline{J}_{t-1}, \overline{J}_t$ de $\overline{T}'$ satisfazem $\overline{J}_t\overline{J}_{t-1} = \Theta(J_tJ_{t-1})$ para alguma operação Θ.

Finalmente, notemos que $\left(diag_p(a)U, D_{(m_1,\ldots,m_{t-2},m_t)}\right)$ realiza um par $(\widetilde{T}, \widetilde{K})$, onde $\widetilde{T}$ tem conjuntos indexantes $J_1, \ldots, J_{t-2}, \overline{J}_{t-1}$, e $\widetilde{K}$ é a chave com peso $(m_1, \ldots, m_{t-2}, m_t)$. Por indução, a palavra $\overline{J}_{t-1}J_{t-2}\cdots J_1$ é franca. Assim, pelo corolário 2.8, concluímos que $J_t \cdots J_1$ é franca e, portanto, $w(T) \equiv K(\sigma)$. □

Referências

[1] G. Appleby, *A simple approach to matrix realizations for Littlewood-Richardson sequences*, Linear and Multilinear Algebra **291** (1999), 1–14.

[2] O. Azenhas, *Realizações matriciais de quadros de Young e suas formas canónicas*, Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra, Coimbra, 1991.

[3] ———, *A regra de Litlewood-Richardson: Generalizações e realizações matriciais*, Actas do 3° Encontro dos Algebristas Portugueses, Universidade de Coimbra, Coimbra (1993), 9–32.

[4] ———, *Opposite Litlewood-Richardson sequences and their matrix realizations*, Linear Algebra and its Applications **225** (1995), 91–116.

[5] ———, *The admissible interval for the invariant factors of a product of matrices*, Linear and Multilinear Algebra **46** (1999), 51–99.

[6] O. Azenhas and E. Marques de Sá, *Matrix realizations of Littlewood-Richardson sequences*, Linear and Multilinear Algebra **27** (1990), 229–242.

[7] O. Azenhas and R. Mamede, *Matrix realizations of pairs of Young tableaux, keys and shuffles*, DMUC preprint **04-40** (2004), 1–30.

[8] ———, *Actions of the symmetric group on sets of skew-tableaux with prescribed matrix realization*, Linear Algebra and its Applications **401** (2005), 221–275.

[9] ———, *Matrix realizations of pairs of tableaux with shuffling condition*, (em preparação) (2005).

[10] C. Ehresmann, *Sur la topologie de certains espaces homogènes*, Annals of Mathematics, (2) **35** (1934), 396–443.

[11] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[12] J. A. Green, *Symmetric function and p-modules*, Lecture notes, University of Warwick, Warwick.

[13] C. Greene, *An extension of Schensted's theorem*, Advances in Mathematics **14** (1974), 254–265.

[14] T. Klein, *The multiplication of Schur functions and extensions of p-modules*, Journal of London Mathematical Society **43** (1968), 280–282.

[15] D. E. Knuth, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific Journal of Mathematics **34** (1970), 709–727.

[16] A. Lascoux, B. Leclerc, and J-Y Thibon, *The plactic monoid*, in M. Lothaire (ed.), Algebraic Combinatorics on Words, Vol. 90 of Enciclopedia of Mathematics and its Applications, pp. 164-196, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[17] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, *Le monoïde plaxique*, in A. D. Luca (ed.), Noncommutative structures in algebra and geometric combinatorics, Vol. 109 of Quaderni de "La Ricerca Scientifica", pp. 129-156, Sci., Rome, 1981.

[18] ———, *The plactic ring*, Lecture Notes (1981).

[19] ———, *Keys and standard bases*, Invariant theory and tableaux (Minneapolis, MN,1988) IMA, Math. Appl., vol. 19, Springer, New York-Berlin, 1990.

[20] R. Mamede, *Permutações de sequências de Littlewood-Richardson e suas realizações matriciais*, Tese de Mestrado, Universidade de Coimbra, Coimbra, 2000.

[21] M. Newman, *Integral Matrices*, Academic Press, New York, 1972.

[22] B. Sagan, *The symmetric group: representation, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Springer Verlag, New York, 2001.

[23] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canadian Journal of Mathematics **13** (1961), 179–191.

Álgebras de Łukasiewicz m-generalizadas de ordem n - um "survey"*

Júlia Vaz de Carvalho[a]

[a] Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Campus de Caparica, Quinta da Torre, 2829-516 Caparica / Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, Av. Professor Gama Pinto, 2, 1649-003 Lisboa, e-mail: jvc@fct.unl.pt

Resumo

As álgebras de Łukasiewicz m-generalizadas de ordem n constituem, tal como a designação sugere, uma generalização das álgebras de Łukasiewicz de ordem n. Basicamente, o reduto de De Morgan destas é substituído por um reduto de álgebra de Ockham em que a operação unária f satisfaz $f^{2m}(x) = x$. Apresentamos um "survey" sobre a variedade das álgebras de Łukasiewicz m-generalizadas de ordem n, percorrendo o caminho desde a motivação para o seu estudo até aos resultados mais recentes.

Palavras-chave: Propriedade de extensão de congruências, Extensão perfeita, Congruências principais definíveis equacionalmente, Álgebra subdirectamente irredutível, Álgebra injectiva, Injectivos suficientes, Propriedade de amalgamação.

*Parte deste trabalho foi realizado em colaboração com T. Almada. Parte dos resultados foram obtidos no âmbito do Projecto POCTI/ISFL/1/143 "Fundamental and Applied Algebra" do Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, financiado pela FCT e pelo FEDER.

1 Motivação e Introdução

As álgebras de Łukasiewicz de ordem n ($n \geq 2$) foram introduzidas por Moisil nos anos 40 com o objectivo de construir álgebras que desempenhassem, relativamente às lógicas de Łukasiewicz, o mesmo papel que as álgebras de Boole desempenham relativamente à lógica clássica [8]. Apesar de, para $n \geq 5$, as álgebras apresentadas por Moisil não cumprirem o objectivo para o qual foram criadas, [6, 8], o seu estudo continuou e revelou-se de grande interesse e importância, em particular, na teoria dos circuitos de comutação (*switching circuits*) [8]. Alguns autores passaram a designar estas álgebras por álgebras de Moisil. Neste trabalho será adoptada a designação inicial, que é a seguida por Balbes e Dwinger [2].

Começamos por definir álgebra de De Morgan e álgebra de Łukasiewicz de ordem n. As noções de Álgebra Universal que não são aqui apresentadas podem ser encontradas em [5, 9].

Definição. Uma *álgebra de De Morgan* é uma álgebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ é um reticulado distributivo limitado e f um seu endomorfismo dual que satisfaz $f^2(x) = x$.

As álgebras de De Morgan constituem uma variedade que representamos por $\mathcal{M}$.

Como referência para a definição de álgebra de Łukasiewicz de ordem n e para as Proposições 1.1 e 1.2 indicamos [2, 6].

Definição. Uma *álgebra de Łukasiewicz de ordem* n ($n \geq 2$) é uma álgebra $\mathbf{A} = (A; \wedge, \vee, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0)$ que satisfaz

(L1) $(A; \wedge, \vee, f, 0, 1)$ é álgebra de De Morgan.

(L2) $D_i(x \wedge y) = D_i(x) \wedge D_i(y)$, $1 \leq i \leq n-1$.

(L3) $D_i(x) \wedge D_j(x) = D_j(x)$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

(L4) $f(D_i(x)) \vee D_i(x) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$.

(L5) $D_i(f(x)) = f(D_{n-i}(x))$, $1 \leq i \leq n-1$.

(L6) $D_i(D_j(x)) = D_j(x)$, $1 \leq i, j \leq n-1$.

(*) $(D_i(x) = D_i(y), \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}) \Rightarrow x = y$.

Proposição 1.1 *Se* **A** *é uma álgebra de Łukasiewicz de ordem n, então* **A** *satisfaz as seguintes identidades*

1) $D_i(x \vee y) = D_i(x) \vee D_i(y)$, $1 \leq i \leq n-1$.

2) $f(D_i(x)) \wedge D_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$.

3) $x \wedge D_{n-1}(x) = D_{n-1}(x)$.

4) $x \vee D_1(x) = D_1(x)$.

5) $D_i(0) = 0$ *e* $D_i(1) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$.

6) $f(x) \wedge D_{n-1}(x) = 0$.

7) $f(x) \vee D_1(x) = 1$.

8) $x \wedge (y \vee f(D_i(y)) \vee D_{i+1}(x)) = x$, $1 \leq i \leq n-2$.

9) $(x \wedge f(x)) \vee y \vee f(y) = y \vee f(y)$.

Proposição 1.2 *Uma álgebra* $\mathbf{A} = (A; \wedge, \vee, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1)$ *de tipo* $(2, 2, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0)$ *é uma álgebra de Łukasiewicz de ordem n se e só se* **A** *satisfaz as identidades (L1) a (L6) da definição e*

(L7) $x \vee D_1(x) = D_1(x)$.

(L8) $x \wedge (y \vee f(D_i(y)) \vee D_{i+1}(x)) = x$, $1 \leq i \leq n-2$.

Assim, dado $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, as álgebras de Łukasiewicz de ordem n constituem uma classe equacional e, portanto, uma variedade, que denotamos por $\mathcal{L}_n$.

Seja $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n$. Observemos que

O reduto de De Morgan de **A** é uma álgebra de Kleene, por 9) da Proposição 1.1;

Para cada i, $1 \leq i \leq n-1$, D_i é um homomorfismo de $(A; \wedge, \vee, 0, 1)$, por (L2) e 1) e 5) da Proposição 1.1;

Para todo o $x \in A$, $f(D_i(x))$ é o complemento Booleano de $D_i(x)$, por (L4) e 2) da Proposição 1.1.

Em 1977, J. Berman introduziu a variedade das álgebras de Ockham, [3]. As suas subvariedades $\mathcal{K}_{m,0}$, $m \in \mathbb{N}$, constituem generalizações naturais das álgebras de De Morgan, como se pode constatar pela definição seguinte.

Definição. Uma *álgebra de* $\mathcal{K}_{m,0}$ é uma álgebra $\mathbf{A} = (A, \wedge, \vee, f, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \wedge, \vee, 0, 1)$ é um reticulado distributivo limitado e f um seu endomorfismo dual que satisfaz $f^{2m}(x) = x$.

Observe-se que $\mathcal{K}_{1,0}$ é a variedade das álgebras de De Morgan e que, para todo o $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}$ constitui uma subvariedade de $\mathcal{K}_{m,0}$.

Tendo em conta que as álgebras de Łukasiewicz ordem n têm reduto de álgebra de De Morgan e a generalização destas pelas álgebras de $\mathcal{K}_{m,0}$, M. Ramalho colocou-nos a seguinte questão: para cada $m \in \mathbb{N}$, apresentar uma variedade de álgebras com reduto em $\mathcal{K}_{m,0}$ tal que, caso $m > 1$, $\mathcal{L}_n$ constituísse uma sua subvariedade própria, e, no caso $m = 1$, a variedade coincidisse com $\mathcal{L}_n$.

Para responder a esta questão, apresentou-se a noção de álgebra de Łukasiewicz m-generalizada de ordem n.

Dados $\mathbf{A}$ álgebra com reduto na variedade $\mathcal{K}_{m,0}$ e $x \in A$, denotamos por $\overline{x}$ o elemento $\bigvee_{j=0}^{m-1} f^{2j}(x)$. Obviamente, $f^2(\overline{x}) = \overline{x}$.

Definição. Uma *álgebra de Łukasiewicz m-generalizada de ordem n* $(n \geq 2)$ é uma álgebra $\mathbf{A} = (A; \wedge, \vee, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0)$ que satisfaz

(LG1) $(A; \wedge, \vee, f, 0, 1) \in \mathcal{K}_{m,0}$.

(LG2) $D_i(x \wedge \overline{y}) = D_i(x) \wedge D_i(\overline{y})$, $1 \leq i \leq n-1$.

(LG3) $D_i(x) \wedge D_j(x) = D_j(x)$, $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

(LG4) $f(D_i(x)) \vee D_i(x) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$.

(LG5) $D_i(f(\overline{x})) = f(D_{n-i}(\overline{x}))$, $1 \leq i \leq n-1$.

(LG6) $D_i(D_j(x)) = D_j(x)$, $1 \leq i, j \leq n-1$.

(LG7) $x \vee D_1(x) = D_1(x)$.

(LG8) $\overline{x} \wedge (\overline{y} \vee f(D_i(\overline{y})) \vee D_{i+1}(\overline{x})) = \overline{x}$, $1 \leq i \leq n-2$.

(LG9) $D_i(x) = D_i(\overline{x})$, $1 \leq i \leq n-1$.

(LG10) $(x \wedge f(x)) \vee y \vee f(y) = y \vee f(y)$.

A classe das álgebras de Łukasiewicz m-generalizadas de ordem n constitui uma variedade que representamos por $\mathcal{L}_n^m$.

Da definição de álgebra de Łukasiewicz m-generalizada de ordem n, demonstra-se o seguinte resultado.

Proposição 1.3 ([1]) *Se* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$*, então* $\mathbf{A}$ *satisfaz as seguintes identidades*

1) $D_i(x \vee y) = D_i(x) \vee D_i(y)$, $1 \leq i \leq n-1$.

2) $f^2(D_i(x)) = D_i(x)$, $1 \leq i \leq n-1$.

3) $f(D_i(x)) \wedge D_i(x) = 0$, $1 \leq i \leq n-1$.

4) $\overline{x} \wedge D_{n-1}(\overline{x}) = D_{n-1}(\overline{x})$.

5) $D_i(0) = 0$ *e* $D_i(1) = 1$, $1 \leq i \leq n-1$.

6) $f(\overline{x}) \wedge D_{n-1}(\overline{x}) = 0$.

7) $f(x) \vee D_1(x) = 1$.

2 Congruências

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade.

Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ e $a, b \in A$. Representamos por $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ o reticulado das congruências de $\mathbf{A}$ e por $\theta(a,b)$ a congruência principal de $\mathbf{A}$ gerada por (a,b), isto é, a menor congruência de $\mathbf{A}$ à qual o par (a,b) pertence. Se $\mathbf{A}$ tem reduto numa variedade $\mathcal{K}$, denotamos por $\mathrm{Con}_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})$ o reticulado das $\mathcal{K}$-congruências de $\mathbf{A}$ e por $\theta_{\mathcal{K}}(a,b)$ a $\mathcal{K}$-congruência principal de $\mathbf{A}$ gerada por (a,b).

Dizemos que $\mathcal{V}$ tem a *propriedade de extensão de congruências* se, para quaisquer $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$ tais que $\mathbf{B}$ é subálgebra de $\mathbf{A}$, toda a congruência de $\mathbf{B}$ tem, pelo menos, uma extensão a $\mathbf{A}$.

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{V}$ tais que $\mathbf{B}$ é subálgebra de $\mathbf{A}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ *é extensão perfeita de* $\mathbf{B}$ se toda a congruência de $\mathbf{B}$ tem uma única extensão a $\mathbf{A}$.

Dado que qualquer álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$ tem reduto na variedade dos reticulados, temos que o reticulado $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ é distributivo e a variedade $\mathcal{L}_n^m$ é c-distributiva. Pelo mesmo motivo, toda a congruência principal de $\mathbf{A}$ é gerada por um par de elementos comparáveis ($\theta(a,b) = \theta(a \wedge b, a \vee b)$).

Seja $\mathbf{A}$ uma álgebra com reduto em $\mathcal{K}_{m,0}$. O conjunto $\{x \in A : f^2(x) = x\}$ é denotado por $S_{\mathbf{A}}$, ou simplesmente por S, caso não haja ambiguidade. É óbvio que se $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_{m,0}$, o conjunto S é o universo da maior subálgebra de $\mathbf{A}$ que é uma álgebra de De Morgan. Sabemos também que, se $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_{m,0}$, a aplicação $\Psi : \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{S})$ definida por $\Psi(\theta) = \theta \cap S^2$ é um isomorfismo de reticulados, ([11]; Proposição 2.1).

A proposição seguinte mostra que temos resultados análogos para álgebras de $\mathcal{L}_n^m$. A afirmação 1) encontra-se demonstrada em ([1]; Proposição 2.2), apresentamos a demonstração de 2), já que em [1] seguimos outro raciocínio.

Proposição 2.1 ([1]) *Seja* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$. *Temos*

1) *O conjunto S é o universo da maior subálgebra de $\mathbf{A}$ que é uma álgebra de Łukasiewicz de ordem n.*

2) *A aplicação $\Psi : \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{S})$ definida por $\Psi(\theta) = \theta \cap S^2$ é um isomorfismo de reticulados.*

Dem. 2) A álgebra $\mathbf{A}$ tem reduto em $\mathcal{K}_{m,0}$ e, portanto, $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ é um subreticulado de $\mathrm{Con}_{\mathcal{K}_{m,0}}(\mathbf{A})$. Seja $\overline{\Psi} : \mathrm{Con}_{\mathcal{K}_{m,0}}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Con}_{\mathcal{K}_{m,0}}(\mathbf{S})$ o isomorfismo de reticulados definido por $\overline{\Psi}(\theta) = \theta \cap S^2$ e consideremos a sua restrição a $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$. É óbvio que $\overline{\Psi}(\mathrm{Con}(\mathbf{A})) \subseteq \mathrm{Con}(\mathbf{S})$. Seja $\rho \in \mathrm{Con}(\mathbf{S})$. Temos $\rho \in \mathrm{Con}_{\mathcal{K}_{m,0}}(\mathbf{S})$ e, portanto, existe $\theta \in \mathrm{Con}_{\mathcal{K}_{m,0}}(\mathbf{A})$ tal que $\rho = \overline{\Psi}(\theta) = \theta \cap S^2$. Seja $(x, y) \in \theta$. Então $(\overline{x}, \overline{y}) \in \theta \cap S^2 = \rho$, logo $(D_i(\overline{x}), D_i(\overline{y})) \in \rho$, para todo o i, $1 \leq i \leq n-1$. Assim, $(D_i(\overline{x}), D_i(\overline{y})) \in \theta$ e $(D_i(x), D_i(y)) \in \theta$, por (LG9), e, portanto, $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Concluímos que $\overline{\Psi}(\mathrm{Con}(\mathbf{A})) = \mathrm{Con}(\mathbf{S})$ e $\Psi : \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{S})$ é um isomorfismo de reticulados. □

Corolário 2.2 ([1]) *Se* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$, *então* $\mathbf{A}$ *é extensão perfeita de* $\mathbf{S}$.

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem *congruências principais definíveis por equações* (CPDE) se existe um número finito de pares de termos quaternários $(p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)$ tais que, para quaisquer $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ e $a, b, c, d \in A$,

$$(c, d) \in \theta(a, b) \Leftrightarrow (p_j(a, b, c, d) = q_j(a, b, c, d), \forall j \in \{1, \ldots, k\}).$$

Fazemos notar, em particular, que esta propriedade tem muita importância nas variedades associadas a sistemas lógicos algebrizáveis, estando relacionada com a satisfação do teorema da dedução por parte destes (ver Introdução de [4]). Para além deste facto, as variedades que têm CPDE são c-distributivas e têm a propriedade de extensão de congruências ([4]; Teorema 1.2).

Sabemos que a variedade $\mathcal{L}_n$ das álgebras de Łukasiewicz de ordem n tem CPDE, ([4]; p.200). Vamos provar que o mesmo acontece com $\mathcal{L}_n^m$ seguindo um caminho diferente do apresentado em [1].

Proposição 2.3 ([1]) *Seja* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$. *Toda a congruência principal de* $\mathbf{A}$ *é supremo finito de congruências principais de* $\mathbf{A}$ *cada uma delas gerada por um par de elementos de* S.

Observemos que na demonstração desta Proposição provamos, de modo não construtivo, a existência de um número finito de pares de elementos de S que satisfazem o pretendido.

Proposição 2.4 ([1]) *Seja* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$. *Se* $(c,d) \in S^2$ *e* $c \leq d$, *temos*

$$\theta(c,d) = \theta_{\mathcal{D}}(c,d) \vee \theta_{\mathcal{D}}(f(c),f(d)) \vee \bigvee_{i=1}^{n-1} \theta_{\mathcal{D}}(D_i(c),D_i(d)),$$

onde $\mathcal{D}$ *representa a variedade dos reticulados distributivos.*

Assim, toda a congruência principal de $\mathbf{A}$ gerada por um par de elementos de S é supremo finito de congruências principais de reticulado distributivo.

Teorema 2.5 ([1]) *A variedade* $\mathcal{L}_n^m$ *tem CPDE.*

Dem. As álgebras da variedade $\mathcal{L}_n^m$ têm reduto de reticulado distributivo e a variedade dos reticulados distributivos tem CPDE. Das Proposições 2.3 e 2.4, concluímos que toda a congruência principal de qualquer álgebra de $\mathcal{L}_n^m$ é supremo finito de congruências principais de reticulado distributivo. Aplicando ([4]; Teorema 1.3), concluímos que $\mathcal{L}_n^m$ tem CPDE. □

Corolário 2.6 ([1]) *A variedade* $\mathcal{L}_n^m$ *tem a propriedade de extensão de congruências.*

Apesar de se saber que a variedade $\mathcal{L}_n^m$ tem CPDE, até ao corrente ano não se conhecia um conjunto de equações que caracterizassem as congruências principais das suas álgebras. O principal problema residia no modo não construtivo como foi demonstrada a Proposição 2.3.

Este problema foi resolvido recorrendo a um resultado não publicado de M. Sequeira e que aqui apresentamos no caso particular das variedades $\mathcal{K}_{m,0}$.

Seja $\mathbf{A}$ uma álgebra com reduto em $\mathcal{K}_{m,0}$. Para cada elemento $z \in A$ e cada $s \in \{1,\ldots,m\}$, definimos

$$\widehat{z}_s := \bigwedge_{J\subseteq T, |J|=s} \bigvee_{j\in J} f^{2j}(z)$$

onde $T = \{0,\ldots,m-1\}$.

Temos que $\widehat{z}_s \in S$.

Proposição 2.7 (M. Sequeira) *Sejam* $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_{m,0}$ *e* $a, b \in A$ *tais que* $a \leq b$. *Temos*

$$\theta(a,b) = \bigvee_{s=1}^{m} \theta(\widehat{a}_s, \widehat{b}_s).$$

Sejam $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$ e $a, b \in A$ tais que $a \leq b$. Definamos

$$\delta(a,b) := \bigvee_{s=1}^{m} \bigvee_{i=1}^{n-1} (D_i(\widehat{b}_s) \wedge f(D_i(\widehat{a}_s))).$$

O resultado de M. Sequeira em conjunto com a Proposição 2.4 e com a descrição obtida por M. Ramalho e M. Sequeira para congruências principais em $\mathcal{K}_{p,q}$ ([10]; p.325), vai-nos permitir obter um conjunto de equações que caracterizam as congruências principais das álgebras de $\mathcal{L}_n^m$. Apresentamos o resultado seguinte sem demonstração.

Teorema 2.8 *Sejam* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$ *e* $a, b \in A$ *tais que* $a \leq b$. *Então*

$(x, y) \in \theta(a, b)$ *se e só se*

$$\left(x \wedge \bigwedge_{j \in F} f^{2j}(a) \wedge \bigwedge_{k \in G} f^{2k+1}(b)\right) \vee \bigvee_{p \in T \setminus F} f^{2p}(b) \vee \bigvee_{q \in T \setminus G} f^{2q+1}(a) \vee \delta(a,b) =$$

$$\left(y \wedge \bigwedge_{j \in F} f^{2j}(a) \wedge \bigwedge_{k \in G} f^{2k+1}(b)\right) \vee \bigvee_{p \in T \setminus F} f^{2p}(b) \vee \bigvee_{q \in T \setminus G} f^{2q+1}(a) \vee \delta(a,b)$$

para cada $F, G \subseteq T$ *onde* $T = \{0, \ldots, m-1\}$.

3 Álgebras subdirectamente irredutíveis

Uma *álgebra subdirectamente irredutível* é uma álgebra que tem uma congruência mínima não trivial.

Uma álgebra que tem exactamente duas congruências diz-se *simples.*

Seja $\mathcal{K}$ uma classe de álgebras do mesmo tipo. Denotamos por $S(\mathcal{K})$ a classe das álgebras que são isomorfas a subálgebras de elementos de $\mathcal{K}$ e por $Si(\mathcal{K})$ a classe das álgebras subdirectamente irredutíveis de $\mathcal{K}$. Denotamos por $V(\mathbf{A})$ a variedade gerada pela álgebra $\mathbf{A}$.

O conhecimento das álgebras subdirectamente irredutíveis de uma variedade é muito importante, já que, em particular, geram a variedade.

Proposição 3.1 *Seja* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$. *A álgebra* $\mathbf{A}$ *é subdirectamente irredutível se e só se a sua subálgebra* $\mathbf{S}$ *o é.*

Dem. Imediato de 2) da Proposição 2.1.

Dada $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$, a sua subálgebra $\mathbf{S}$ é uma álgebra de Łukasiewicz de ordem n. A variedade $\mathcal{L}_n$ é semisimples e as suas álgebras subdirectamente irredutíveis são as álgebras de $S(\mathbf{L}_n)$, em que $\mathbf{L}_n = (\mathbf{n}, \wedge, \vee, f, D_1, \ldots, D_{n-1}, 0, n-1)$ sendo $(\mathbf{n}, \wedge, \vee, 0, n-1)$ a cadeia com n elementos

$$0 < \ldots < n-1$$

e estando as operações unárias definidas por

$$f(p) = n - 1 - p \quad \text{e} \quad Di(p) = \begin{cases} n-1 & \text{se} \quad p > i-1 \\ 0 & \text{se} \quad p \leq i-1 \end{cases}$$

para todo o $p, 0 \leq p \leq n-1$, e para todo o i, $1 \leq i \leq n-1$.

Teorema 3.2 ([1]) *Se* $\mathbf{A} \in \mathcal{L}_n^m$, *as afirmações seguintes são equivalentes*

1) $\mathbf{A}$ *é subdirectamente irredutível.*

2) $\mathbf{S}$ *é subdirectamente irredutível.*

3) $\mathbf{S} \in S(\mathbf{L}_n)$.

4) $\mathbf{S}$ *é simples.*

5) $\mathbf{A}$ *é simples.*

Corolário 3.3 *A variedade* $\mathcal{L}_n^m$ *é semisimples.*

Corolário 3.4 ([1]) *Toda a álgebra subdirectamente irredutível de* $\mathcal{L}_n^m$ *é finita.*

Proposição 3.5 *Sejam* $\mathbf{A}$ *álgebra finita de* $\mathcal{L}_n^m$, $a, b \in S$ *tais que* $a < b$ *e* $[a, b] \cap S = \{a, b\}$. *Então*

1) *O intervalo* $[a, b]$ *é reticulado de Boole (finito) com* k *átomos, para certo* k *divisor de* m.

Mais,

1.1) *Se* x *é átomo de* $[a, b]$, *então os seus átomos são* $f^{2j}(x)$, $0 \leq j \leq k-1$.

1.2) *Para cada átomo y de $[a,b]$, o número k é o menor inteiro positivo tal que $f^{2k}(y) = y$.*

2) *Se $f([a,b]) = [a,b]$ então $|[a,b]| = 2$, $f(a) = b$ e $f(b) = a$.*

Seja $x \in \mathbb{R}$. Como é usual, representamos a característica de x por $\lfloor x \rfloor$.

Tendo em conta o resultado anterior e o Teorema 3.2, vamos considerar as álgebras de $\mathcal{L}_n^m$ que a seguir se apresentam. Estas álgebras são, obviamente, subdirectamente irredutíveis.

Para cada álgebra $\mathbf{L} \in S(\mathbf{L}_n)$, $L = \{a_0, \ldots, a_p\}$ com $0 = a_0 < \ldots < a_p = 1$, tomamos a soma ordinal $A = A_0 \oplus \ldots \oplus A_{p-1} \oplus 1$, onde

1) Para todo o $t \in \{0, \ldots, p-1\}$, $A_t \oplus 1$ é um reticulado de Boole finito com k_t átomos, k_t divisor de m, sendo a_t o seu elemento mínimo e a_{t+1} o seu elemento máximo; mais, $A_t \oplus 1$ é isomorfo a $A_{p-t-1} \oplus 1$ e, se p é ímpar, $A_{\frac{p-1}{2}} \oplus 1$ é o reticulado de Boole com dois elementos;

2) A operação f é o endomorfismo dual de reticulado induzido por

$$f(a_j) = a_{p-j}\ , \text{ para todo o } j \in \{0, \ldots, p\},$$

e, sempre que $k_t > 1$,

$$f(a_{jt}) = \begin{cases} c(a_{j,p-t-1}) & \text{se } \ 0 \leq t < \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \\ c(a_{j+1(mod\, k_t),p-t-1}) & \text{se } \ \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \leq t \leq p-1 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde a_{jt}, $0 \leq j \leq k_t - 1$, são os átomos de $A_t \oplus 1$ e c é a complementação no reticulado de Boole $A_{p-t-1} \oplus 1$;

3) Para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, a operação D_i é determinada pela operação correspondente na álgebra $\mathbf{L}$, $D_i^{\mathbf{L}}$, mais precisamente, para cada $x \in A$, o elemento $\overline{x} \in S_A$, e, portanto $\overline{x} = a_j$, para algum $j \in \{0, \ldots, p\}$, e definimos $D_i(x) := D_i^{\mathbf{L}}(a_j)$.

Denotamos a classe destas álgebras subdirectamente irredutíveis por Si_n^m e por $\mathbf{L}_n^m$ uma destas álgebras construída a partir de $\mathbf{L}_n$ e tal que, para todo o $t \in \{0, \ldots, n-2\}$, $A_t \oplus 1$ é um reticulado de Boole finito com m átomos, excepto $A_{\frac{n-2}{2}} \oplus 1$, que, no caso n par, é o reticulado de Boole com 2 elementos.

Observe-se que a variedade gerada por $\mathbf{L}_n^m$ ainda admite a variedade das álgebras de Łukasiewicz de ordem n como subvariedade.

Proposição 3.6 *Seja* $\mathbf{A}$ *uma álgebra subdirectamente irredutível de* $\mathcal{L}_n^m$*. Temos*

1) *Todo o homomorfismo de* $\mathbf{A}$ *para uma álgebra não trivial é injectivo.*

2) $Si(V(\mathbf{A})) = S(\mathbf{A})$.

3) $V(\mathbf{A}) = SP(\mathbf{A})$.

Proposição 3.7 *Sejam* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Si(\mathcal{L}_n^m)$*. Se* $S_\mathbf{B} \in S(S_\mathbf{A})$*, então existe um único homomorfismo de* $S_\mathbf{B}$ *em* $S_\mathbf{A}$ *e este homomorfismo é injectivo.*

Seja $\mathbf{A} \in Si(\mathcal{L}_n^m)$. Pelo Teorema 3.2, sabemos que $S \in S(\mathbf{L}_n)$. Neste contexto, ao escrevermos $S = \{a_0, \ldots, a_p\}$ estamos a considerar que $0 = a_0 < \ldots < a_p = 1$.

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Si(\mathcal{L}_n^m)$, $S_\mathbf{A} = \{a_0, \ldots, a_p\}$, $S_\mathbf{B} = \{b_0, \ldots, b_q\}$ e $h : S_\mathbf{B} \to S_\mathbf{A}$ um homomorfismo. Chamamos *função-índice induzida por* h à função $\alpha : \{0, \ldots, q\} \to \{0, \ldots p\}$ tal que $h(b_j) = a_{\alpha(j)}$, para todo o $j \in \{0, \ldots, q\}$.

Teorema 3.8 *Seja* $\mathbf{A} \in Si_n^m$*. A álgebra* $\mathbf{B} \in Si(V(\mathbf{A}))$ *se e só se*

1) $\mathbf{B} \in Si_n^m$

2) $S_\mathbf{B} \in S(S_\mathbf{A})$

3) *Se* $S_\mathbf{B} = \{b_0, \ldots, b_q\}$*,* $S_\mathbf{A} = \{a_0, \ldots, a_p\}$ *e* α *é a função-índice induzida pelo único homomorfismo de* $S_\mathbf{B}$ *em* $S_\mathbf{A}$*, então, sempre que* $t \in \{0, \ldots, q-1\}$ *é tal que* $|[b_t, b_{t+1}]| > 2$*, temos* $\alpha(t+1) = \alpha(t) + 1$ *e o número de átomos de* $[b_t, b_{t+1}]$ *divide o número de átomos de* $[a_{\alpha(t)}, a_{\alpha(t)+1}]$*.*

Tendo em conta o modo como construímos as álgebras de Si_n^m e a definição de $\mathbf{L}_n^m$, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.9 *A álgebra* $\mathbf{B} \in Si(V(\mathbf{L}_n^m))$ *se e só se*

1) $\mathbf{B} \in Si_n^m$

2) *Se* $S_\mathbf{B} = \{b_0, \ldots, b_q\}$ *e* h *é o (único) homomorphismo de* $S_\mathbf{B}$ *em* $\mathbf{L}_n$*, então, sempre que* $t \in \{0, \ldots, q-1\}$ *é tal que* $|[b_t, b_{t+1}]| > 2$*, temos* $h(b_{t+1}) = h(b_t) + 1$.

4 Injectividade

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade. Dizemos que $\mathbf{I} \in \mathcal{V}$ é *injectiva* se, para quaisquer $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{B}$ subálgebra de $\mathbf{A}$ e $g : \mathbf{B} \to \mathbf{I}$ homomomorfismo, existe um homomorfismo de $\mathbf{A}$ em $\mathbf{I}$ que estende g. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem *injectivos suficientes* se toda a álgebra de $\mathcal{V}$ tem uma extensão injectiva em $\mathcal{V}$, isto é, para qualquer $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, existem $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ injectiva e $h : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ homomorfismo injectivo. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem a *propriedade de amalgamação* se, para quaisquer $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$, $(\mathbf{B}_j)_{j\in J}$ família, não vazia, de elementos de $\mathcal{V}$ e $(h_j : \mathbf{A} \to \mathbf{B}_j)_{j\in J}$ família de homomorfismos injectivos, existem $\mathbf{C} \in \mathcal{V}$ e uma família de homomorfismos injectivos $(g_j : \mathbf{B}_j \to \mathbf{C})_{j\in J}$ tais que $g_j \circ h_j = g_k \circ h_k$, para quaisquer $j, k \in J$.

Baseamo-nos em ([7], Teorema 4.1) para provar o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Seja $\mathbf{A} \in Si_n^m$. A variedade gerada por $\mathbf{A}$ tem injectivos suficientes.*

Pelo mesmo resultado de A. Day, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.2 *Seja $\mathbf{A} \in Si_n^m$. A variedade gerada por $\mathbf{A}$ tem a propriedade de amalgamação.*

Nota final: Consideremos a variedade gerada por $\mathbf{L}_n^m$ que denotamos por $\mathcal{V}_n^m$. Como já dissemos, $\mathcal{V}_n^m$ ainda admite a variedade das álgebras de Łukasiewicz de ordem n como subvariedade e, para além das propriedades inerentes ao facto de ser uma subvariedade de $\mathcal{L}_n^m$, $\mathcal{V}_n^m$ tem injectivos suficientes e, consequentemente, tem a propriedade de amalgamação.

Referências

[1] Almada, T., e J. Vaz de Carvalho, A Generalization of the Łukasiewicz Algebras, *Studia Logica* **69** (2001), 329-338.

[2] Balbes, R., e P. Dwinger, *Distributive Lattices*, University of Missouri Press, 1974.

[3] Berman, J., Distributive lattices with an additional unary operation, *Aequationes Math.* **16** (1977), 165-171.

[4] Blok, W. J., e D. Pigozzi, On the structure of varieties with equationally definable principal congruences I, *Algebra Universalis* **15** (1982), 195-227.

[5] Burris, S., e H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[6] Cignoli, R., Moisil Algebras, *Notas de Lógica Matemática* **27**, Instituto de Matemática, Universidade Nacional del Sur Bahía Blanca, 1970.

[7] Day, A., Injectivity in Equational Classes of Algebras, *Can. J. Math.* **24** (1972), 209-220.

[8] Malinowski, G., *Many-Valued Logics*, Oxford Logic Guides 25, Clarendon Press-Oxford, 1993.

[9] McKenzie, R., G. McNulty e W. Taylor, *Algebras, Lattices, Varieties, I*, Wadsworth-Brooks, Monterey, California, 1987.

[10] Ramalho, M., e M. Sequeira, On Generalized MS-Algebras, *Portugaliae Mathematica* **44** (1987), 315-328.

[11] Vaz de Carvalho, J., Congruences on algebras of $K_{n,0}$, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **54** (1985), 301-303.

Propriedades Assimptóticas das Potências de Rees de um Módulo

Ana Luísa Correia[a] , Santiago Zarzuela[b]

[a]Universidade Aberta & Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias (CELC) da Universidade de Lisboa, e-mail: alcorreia@cii.fc.ul.pt
[b]Universidade de Barcelona, e-mail: zarzuela@mat.ub.es

Resumo

As álgebras de Rees de ideais foram introduzidas por Rees para provar o lema de Artin-Rees (1956) sobre filtrações de módulos. Nos anos 90, vários matemáticos estudaram as álgebras de Rees de módulos com vista à generalização para módulos de alguns resultados sobre ideais. Por outro lado, as álgebras de Rees de módulos revelaram um papel importante no estudo de singularidades em geometria algébrica. Neste âmbito, introduziremos o conceito de potência de Rees de um módulo e discutiremos algumas propriedades assimptóticas dessas potências.

Palavras-chave: Álgebra de Rees, propriedades assimptóticas, potência de Rees.

1 Preliminares

Um anel R será sempre comutativo e com identidade. A notação $(R, \mathfrak{m}, k)$ indica que R é local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo residual $k = R/\mathfrak{m}$. I, J designam ideais de R e E, G, M designam R-módulos unitários finitamente gerados. O conjunto de todos os ideais primos de R diz-se o *espectro* de R e é denotado por $\operatorname{Spec} R$. Denotamos por $\dim R$ a *dimensão de Krull* de R, que é por definição

$$\dim R := \sup\{n \mid \exists\, \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R\}.$$

Dado um módulo E, a dimensão de Krull de E é

$$\dim E := \dim R/\operatorname{ann}_R(E).$$

Se $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ temos que

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} := \sup\{n \mid \exists\, \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec} R\}$$

é a *altura* de $\mathfrak{p}$. Dado $I \subset R$ um ideal

$$\operatorname{ht} I := \inf\{\operatorname{ht} \mathfrak{p} \mid I \subseteq \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)\}$$

é a altura de I. Um elemento $a \in R$ diz-se *E-regular* se $am = 0$, $m \in E$, implica que $a = 0$. Uma sequência $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 0)$ de elementos de R diz-se uma *E-sequência regular* se $E \neq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle E$ e a_i é $E/\langle a_1, \ldots, a_{i-1} \rangle E$-regular para $i = 1, \ldots, n$. Denota-se por $\operatorname{depth}_I E$ o comprimento de qualquer E-sequência regular maximal contida no ideal I e diz-se a *profundidade de E relativamente a I*. Em particular, define-se *grade de I* por $\operatorname{grade} I := \operatorname{depth}_I R$ e *profundidade de E* por $\operatorname{depth} E := \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}} E$ supondo $(R, \mathfrak{m})$ local. Por último,

$$\operatorname{Ass} E := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} = \operatorname{ann}_R(x) \text{ para algum } x \in E\}$$

é o conjunto dos *primos associados* de E. Estes conceitos podem ser encontrados em [11].

2 Potências de um ideal

Uma *filtração multiplicativa descendente* de um anel é uma sequência de ideias $R = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ satisfazendo

$$I_i I_j \subset I_{i+j}$$

para todos i, j. No caso em que os $I_n = I^n$ são potências de um ideal obtemos a *filtração I-ádica*.

Em anéis Noetherianos, as potências de um ideal são bem comportadas como se pode ver no Lema de Artin-Rees.

Lemma de Artin-Rees. *Seja R um anel Noetheriano, I um R-ideal, M um R-módulo finitamente gerado e N um R-submodulo de M. Então existe um inteiro $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$I^{n+k}M \cap N = I^n(I^kM \cap N).$$

Isto significa que a topologia I-ádica $\{I^nN\}_{n\geq 1}$ de N coincide com a topologia $\{I^nM \cap N\}_{n\geq 1}$ induzida pela topologia I-ádica de M no submódulo N de M.

Este lema foi provado independentemente por M. Artin e por D. Rees e revelou-se de extrema importância no desenvolvimento da Álgebra Comutativa. Para o provar Rees (1956) considerou a álgebra graduada

$$\mathcal{R}_R(I) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n \simeq \bigoplus_{n\geq 0} I^nt^n = R[It] \subset R[t]$$

actualmente conhecida por *álgebra de Rees* de I. Esta álgebra e a *álgebra graduada associada*

$$\mathcal{G}_R(I) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1} \simeq \mathcal{R}_R(I) \otimes_R R/I$$

são duas álgebras graduadas que reflectem várias propriedades algébricas e geométricas do ideal I.

Seja $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel Noetheriano local, $I \subset R$ um ideal. O anel

$$\mathcal{F}_R(I) := \mathcal{R}_R(I)/\mathfrak{m}\mathcal{R}_R(I) = \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$$

diz-se o *cone fibrado* de $\mathcal{R}_R(I)$, a sua dimensão de Krull

$$\ell(I) := \dim \mathcal{F}_R(I)$$

diz-se a *dispersão analítica* de I.

Dado um anel graduado $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ o conjunto de todos os primos homogéneos $\mathfrak{p}$ tais que $R_+ := \bigoplus_{n\geq 1} R_n \not\subseteq \mathfrak{p}$ denota-se por $\operatorname{Proj} R$ e chama-se o *espectro homogéneo* de R. Tem-se que $\operatorname{Proj} \mathcal{F}_R(I)$ é a fibra de $\mathfrak{m}$ pela explosão π_I de R com centro em I:

$$\begin{array}{rccc} \pi_I : & \operatorname{Proj} \mathcal{R}(I) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(R) \\ & \mathfrak{p} & \longmapsto & \mathfrak{p} \cap R \end{array}$$

e $\operatorname{Spec} \mathcal{F}_R(I)$ é o seu cone afim. Por outro lado, $\operatorname{Proj} \mathcal{G}(I) = \pi_I^{-1}(V(I)) \subset \operatorname{Proj} \mathcal{R}(I)$ define um divisor em $\operatorname{Proj} \mathcal{R}(I)$ chamado *dividor excepcional*. "Blowing up" é uma construção fundamental e uma ferramenta útil, por exemplo para a classificação de superfícies.

3 A desigualdade de Burch

A noção de dispersão analítica foi introduzida por D. Northcott and D. Rees em 1954, e satisfaz as seguintes desigualdades

$$\operatorname{ht} I \leq \ell(I) \leq \dim R.$$

Em 1972, L. Burch [3] provou que $\ell(I)$ satisfaz a seguinte desigualdade.

Teorema (Desigualdade de Burch). *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e $I \subseteq R$ um ideal. Então*

$$\ell(I) \leq \dim R - \inf_{n \geq 1} \operatorname{depth} R/I^n.$$

A demonstração original de Burch é complicada. Actualmente demonstra-se mais facilmente recorrendo ao anel graduado associado $\mathcal{G}_R(I)$.

Demonstração (esboço). Prova-se que

(1) $\ell(I) = \dim \mathcal{F}_R(I) = \dim \mathcal{G}_R(I)/\mathfrak{m}\mathcal{G}_R(I) \leq \dim \mathcal{G}_R(I) - \operatorname{ht} \mathfrak{m}\mathcal{G}_R(I)$,

(2) $\dim \mathcal{G}_R(I) = \dim R$,

(3) $\operatorname{ht} \mathfrak{m}\mathcal{G}_R(I) \geq \operatorname{grade} \mathfrak{m}\mathcal{G}_R(I) = \inf_{n \geq 0} \operatorname{depth} I^n/I^{n+1} \geq \inf_{n \geq 1} \operatorname{depth} R/I^n$.

De (1), (2) e (3) segue-se que

$$\ell(I) \leq \dim R - \inf_{n \geq 1} \operatorname{depth} R/I^n.$$

□

Dado um anel local $(R, \mathfrak{m})$ tem-se sempre

$$\operatorname{depth} R \leq \dim R.$$

R diz-se *Cohen-Macaulay* se $\operatorname{depth} R = \dim R$. Por exemplo, anéis de séries formais são Cohen-Macaulay.

No caso em que $\operatorname{ht} I > 0$ e $\mathcal{G}_R(I)$ é Cohen-Macaulay a desigualdade de Burch é uma igualdade, i.e, tem-se

$$\ell(I) = \dim R - \inf_{n \geq 1} \operatorname{depth} R/I^n$$

– provado em [7] por D. Eisenbud e C. Huneke (1983).

4 Propriedades assimptóticas

O interesse em corportamentos assimptóticos foi originado por L. Ratliff (1976) acerca do comportamento do conjunto dos primos associados $\operatorname{Ass}_R R/I^n$ para n grande. Ratliff [13] provou que:

Teorema (L. Ratliff, 1976). *Seja R um anel Noetheriano e $I \subset R$ um ideal. Então*

(1) *o conjunto $\bigcup_{n\geq 0} \operatorname{Ass}_R R/I^n$ é finito.*

(2) $\operatorname{Ass}_R R/\overline{I^n} = \operatorname{Ass}_R R/\overline{I^{n+1}} = \cdots =$ *para n grande, onde $\overline{I^i}$ denota o fecho inteiro de I^i.*

Em 1979, M. Brodmann [1] resolveu completamente a questão de Ratliff.

Teorema (M. Brodmann, 1979). *Seja R um anel Noetheriano, $I \subset R$ um ideal e M um R-módulo finitamente gerado. Então*

$$\operatorname{Ass}_R M/I^nM = \operatorname{Ass}_R M/I^{n+1}M = \cdots$$

para $n \gg 0$. Em particular, o conjunto de ideais primos primos

$$\bigcup_{n\geq 0} \operatorname{Ass}_R M/I^nM$$

é finito.

Além disso, M. Brodmann [2] provou o comportamento assimptótico das profundidades $\operatorname{depth}_J M/I^nM$, onde I, J são ideais de R e M um R-módulo. Mais, estendeu o conceito de dispersão analítica e estendeu a desigualdade de Burch.

A dimensão de Krull

$$\ell_J(I, M) := \dim \bigoplus_{n\geq 0} I^nM/JI^nM$$

diz-se a *dispersão analítica de I em J com respeito a M.*

Teorema (M. Brodmann, 1979). *Seja R um anel Noetheriano, $I, J \subset R$ ideais e M um R-módulo finitamente gerado. Então*

(1) $\operatorname{depth}_J M/I^nM = \operatorname{depth}_J M/I^{n+1}M = \cdots$ *para $n \gg 0$ e este valor assimptótico é denotado por* $\operatorname{depth}_J(I, M)$.

(2) $\ell_J(I, M) \leq \dim M - \operatorname{depth}(I, M)$ *se $I \subseteq J$.*

5 "Potências" de módulos

Se $\iota\colon I \hookrightarrow R$ é a inclusão natural de I em R e $\mathcal{S}(\iota)\colon \mathcal{S}_R(I) \to \mathcal{S}_R(R) \simeq R[t]$ é a sua extensão natural à álgebra simétrica, então

$$\mathcal{R}_R(I) \simeq \mathcal{S}(\iota)(\mathcal{S}_R(I)).$$

Além disso, temos que

$$[\mathcal{R}_R(I)]_n = I^n$$

– i.e. a n-ésima peça graduada de álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ é exactamente a n-ésima potência de I.

Suponhamos, agora, que

- $G \simeq R^e$ é um R-módulo livre, $e > 0$,
- $f\colon E \hookrightarrow G$ é uma imersão de E em G.

Então a álgebra simétrica $\mathcal{S}_R(G) \simeq R[t_1, \ldots, t_e]$ é um anel de polinómios em e indeterminadas e a imersão f induz de forma natural um homomorfismo de álgebras graduadas

$$\phi = \mathcal{S}(f)\colon \mathcal{S}_R(E) \to \mathcal{S}_R(G).$$

Assim, se para cada n, $\phi_n = \phi|_{\mathcal{S}_R(E)_n}$, temos que

$$\phi_n(\mathcal{S}_R(E)_n) \subseteq \mathcal{S}_R(G)_n \simeq R[t_1, \ldots, t_e] \simeq R^{\binom{n+e-1}{e-1}}.$$

Definicão. Definimos a *n-ésima potência de Rees de E (com respeito a G e a f)* por

$$E^n_{G,f} := \phi_n(\mathcal{S}_R(E)_n).$$

Definimos a *álgebra de Rees* de $E \overset{f}{\hookrightarrow} G \simeq R^e$ *(com respeito à imersão f)* por

$$\mathcal{R}_G(E) := \phi(\mathcal{S}_R(E)) = \bigoplus_{n \geq 0} E^n_{G,f} \subset R[t_1, \ldots, t_e].$$

Para simplificar a notação escrevemos apenas E^n em vez de $E^n_{G,f}$. Note-se que, para cada n, $E^n \subset G^n \simeq R[t_1, \ldots, t_e]_n$.

O estudo das álgebras de Rees de módulos não é uma generalização rotineira do que acontece para ideais. Uma das principais razões é que a importante interacção entre a álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ e a álgebra graduada associada $\mathcal{G}_R(I)$ não existe no caso dos módulos. Note-se que, no caso dos ideais

$$\cdots \subseteq I^{n+1} \subseteq I^n \subseteq \cdots \subseteq I \subset R,$$

enquanto que nos módulos

$$E \subset G\,,\, E^n = \phi_n(\mathcal{S}_R(E)_n) \subset G^n.$$

Vários autores usaram as e-ésimas componentes $\phi_n(\mathcal{S}_R(E)_n)$, que denotaram por E_n, para generalizar resultados acerca de potências de ideais para módulos. Por exemplo, D. Buchsbaum e D. Rim (1965), em [4], estenderam a teoria da multiplicidade de Hilbert-Samuel para ideais a módulos, estudando o comportamento assimptótico de cocientes do tipo G_n/E_n. No entanto, o interesse pelo estudo das álgebras de Rees de módulos não é apenas motivado pela procura de generalizações para módulos dos resultados conhecidos para ideais. Por exemplo, T. Gaffney (1992) [9] usou a multiplicidade de Buchsbaum-Rim de um módulo Jacobiano (módulo gerado pelas colunas de uma matriz Jacobiana) para estudar as famílias de germes das singularidades isoladas de intersecção completa - ICIS. Gaffney considerou a álgebra de Rees de um submódulo M de um $\mathcal{O}_X$-módulo livre, onde X é uma certa variedade algébrica e $\mathcal{O}_X$ é o anel das funções regulares em X. Estes trabalhos foram continuados por Kleiman-Thorup, Gaffney-Kleiman.

6 Propriedades assimptóticas para módulos

Em [10], D. Katz e C. Naude (1995) consideraram cocientes do tipo G_n/E_n para estender os resultados de M. Brodmann sobre a estabilidade do conjunto dos primos associados.

Teorema (Katz-Naude, 1995). *Sejam R um anel Noetheriano e $E \subset G \simeq R^e$. Então*

$$\mathrm{Ass}_R(G_n/E_n) = \mathrm{Ass}_R(G_{n+1}/E_{n+1}) = \cdots$$

para $n \gg 0$.

Usando este resultado, estendemos os resultados de M. Brodmann sobre o comportamento assimptótico da profundidade e provamos a desigualdade de Burch para módulos. Os detalhes encontram-se em [5] e em [6].

Teorema 1. *Suponhamos que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel Noetheriano local,* $\dim R = d > 0$ *e $E \subset G \simeq R^e$, $e > 0$, é uma imersão fixa. Então*

$$\text{depth } G^n/E^n = \text{depth } G^{n+1}/E^{n+1} = \cdots$$

para $n \gg 0$, e denotamos esse valor por $\text{depth}\,(G, E)$.

Demonstração (esboço). Usamos indução sobre o limite inferior

$$\alpha = \liminf_{n\to\infty} \operatorname{depth} G^n/E^n.$$

Se $\alpha = 0$, existe $m \gg 0$ tal que depth $G^m/E^m = 0$. Logo $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} G^m/E^m$ e, como estes conjuntos estabilizam, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Ass} G^n/E^n$ para n grande. Segue-se que, depth $G^n/E^n = 0$ para n grande. Suponhamos que $\alpha > 0$. Então existe $m \geq 1$ tal que depth $G^n/E^n > 0$ para todo $n \geq m$. Como estes conjuntos estabilizam, existe $a \in \mathfrak{m}$ tal que $a \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} G^n/E^n} \mathfrak{p}$ para $n \gg 0$. Deste modo,

$$\operatorname{depth}\,(G^n/E^n)/a(G^n/E^n) = \operatorname{depth} G^n/E^n - 1.$$

Por outro lado, podemos provar, para $\overline{G} = G/aG$ e $\overline{E} = E/aE$, que

$$(G^n/E^n)/a(G^n/E^n) \simeq_{R/\langle a\rangle} \overline{G}^n/\overline{E}^n.$$

Logo

$$\liminf_{n\to\infty} \operatorname{depth} \overline{G}^n/\overline{E}^n < \liminf_{n\to\infty} \operatorname{depth} G^n/E^n = \alpha,$$

e o resultado segue-se por indução. □

7 Desigualdade de Burch para módulos

Suponhamos que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel Noetheriano local, $\dim R = d$ e $E \subset G \simeq R^e$.

Definicão. Definimos *cone fibrado de $\mathcal{R}_G(E)$ (com respeito à imersão $E \subset G$)* por

$$\mathcal{F}_G(E) := \mathcal{R}_G(E)/\mathfrak{m}\mathcal{R}_G(E) = \bigoplus_{n\geq 0} E^n/\mathfrak{m}E^n.$$

A dimensão de Krull

$$\ell(E) := \dim \mathcal{F}_G(E)$$

diz-se a *dispersão analítica de E (com respeito à imersão $E \subset G$).*

Temos as seguintes desigualdades.

Proposição 2. *Nas condições acima*

(1) $\dim \mathcal{R}_G(E) \leq d + e$.

(2) $\ell(E) \leq d + e - 1$.

Demonstração (esboço). Denotando por $\operatorname{Min} R$ os primos minimais de R, prova-se que

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{R}_G(E) &= \max\{\dim \mathcal{R}_{G/\mathfrak{p}G}(E+\mathfrak{p}G/\mathfrak{p}G) \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Min} R\} \\ &\leq \dim R/\mathfrak{p} + e \leq d+e.\end{aligned}$$

Por outro lado, também se prova que $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}\mathcal{R}_G(E)) > 0$. Deste modo,

$$\begin{aligned}\ell(E) &= \dim \mathcal{R}_G(E)/\mathfrak{m}\mathcal{R}_G(E) \leq \dim \mathcal{R}_G(E) + \operatorname{ht}(\mathfrak{m}\mathcal{R}_G(E)) \\ &< \dim \mathcal{R}_G(E) \leq d+e.\end{aligned}$$

□

A desigualdade (2) será útil para provarmos a desigualdade de Burch para módulos.

Teorema 3 (Desigualdade de Burch). *Nas condições acima*

$$\ell(E) \leq d+e-1-\operatorname{depth}(G,E) \leq d+e-1-\inf_{n\geq 1} \operatorname{depth} G^n/E^n.$$

Demonstração (esboço). Usamos indução sobre $\beta = \operatorname{depth}(G,E)$. Se $\beta = 0$, a desigualdade resulta de (2) da Proposição 2. Se $\beta > 0$, podemos escolher $a \in \mathfrak{m}$ tal que

$$a \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} R} \mathfrak{p}\ , \quad a \notin \bigcup_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Ass} G^n/E^n} \mathfrak{p} \quad (n \gg 0).$$

Para $\overline{G} = G/aG$, $\overline{E} = E/aE$ prova-se que

(1) $\ell_{\overline{G}}(\overline{E}) = \ell(E)$

(2) $\operatorname{depth}(\overline{G},\overline{E}) = \operatorname{depth}(G,E)$

e, como $\dim R/\langle a\rangle = \dim R - 1$, o resultado deduz-se por indução. □

8 Igualdade de Burch para módulos

Diz-se que um módulo E tem *rank* se existe $r \geq 0$ tal que

$$E_{\mathfrak{p}} \simeq R_{\mathfrak{p}}^r \text{ para todos } \mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R.$$

Neste caso, é conhecido o valor da dimensão de Krull da álgebra de Rees $\mathcal{R}_G(E)$,

$$\dim \mathcal{R}_G(E) = \dim R + \operatorname{rank} E$$

– provado por A. Simis, B. Ulrich, W. Vasconcelos (2003) em [15].

No caso dos ideais, temos que se $\operatorname{ht} I > 0$ então I tem rank e $\operatorname{rank} I = 1$. Além disso, já observámos que se $\operatorname{ht} I > 0$ e $\mathcal{G}_R(I)$ é Cohen-Macaulay então a desigualdade de Burch é uma igualdade. Por outro lado, S. Ikeda e N. V. Trung (1989) provaram que se R é Cohen-Macaulay, $\operatorname{ht} I > 0$ e $\mathcal{R}_R(I)$ é Cohen-Macaulay então $\mathcal{G}_R(I)$ é Cohen-Macaulay (ver [14]).

No caso de módulos com rank provamos o seguinte.

Teorema 4. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel Cohen-Macaulay e suponhamos que $E \subset G \simeq R^e$ não é livre e tem rank $e > 0$. Se $\mathcal{R}_G(E)$ é Cohen-Macaulay, então*

$$\ell(E) = d + e - 1 - \operatorname{depth}(G, E) = d + e - 1 - \inf_{n \geq 1} \operatorname{depth} G^n/E^n.$$

Demonstração (esboço). Nas condições dadas prova-se que

(1) $\operatorname{grade} \mathfrak{m}\mathcal{R}_G(E) = \inf_{n\geq 1} \operatorname{depth} E^n$,

(2) $\ell(E) \geq \operatorname{depth} \mathcal{R}_G(E) - \operatorname{grade} \mathfrak{m}\mathcal{R}_G(E)$.

Segue-se que

$$\ell(E) \geq \operatorname{depth} \mathcal{R}_G(E) - \inf_{n\geq 1} \operatorname{depth} E^n = d + e - \inf_{n\geq 1} \operatorname{depth} G^n/E^n - 1.$$

A igualdade resulta, agora, aplicando a desigualdade de Burch. □

9 Álgebras de Rees de módulos - outras abordagens

A construção das álgebras de Rees de módulos foi iniciada em 1964 por A. Micali [12] como solução de um problema universal. Micali provou que o par $(\mathcal{R}(E), \varphi_E)$ onde

$$\mathcal{R}(E) := \mathcal{S}(E)/\tau_R(\mathcal{S}_R(E)),$$

$\mathcal{S}(E)$ é a álgebra simétrica de E, $\tau_R(\mathcal{S}(E))$ é o submódulo de torção e

$$\varphi_E \colon E \overset{\phi_E}{\hookrightarrow} \mathcal{S}(E) \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{R}(E)$$

é a composição $\varphi_E = \pi \circ \phi_E$, ϕ_E a inclusão natural e π o epimorfismo canónico, é tal que para toda a R-álgebra comutativa livre de torção A e toda a aplicação R-linear $g \colon E \to A$ existe um único homomorfismo de R-álgebras $h \colon \mathcal{R}(E) \to A$ tal que $h \circ \varphi_E = g$, i.e. tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi_E"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{R}_G(E) \arrow[dl, "h"] \\ A & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Notemos que esta definição é apenas adequada para módulos com rank. De facto, no caso dos ideais com rank, esta noção coincide com a noção clássica de álgebra de Rees de um ideal, uma vez que

$$\bigoplus_{n\geq 0} I^n \simeq \mathcal{S}(I)/\tau_R(\mathcal{S}(I)).$$

Mais geralmente, no caso dos módulos com rank e imersos num módulo livre as duas definições coincidem. Com efeito, se $E \overset{f}{\hookrightarrow} G \simeq R^e$, $\operatorname{rank} E = e$, $e > 0$, então

$$\mathcal{R}(E) = \mathcal{S}(E)/\tau_R(\mathcal{S}_R(E)) \simeq \bigoplus_{n\geq 0} E^n_{G,f} = \phi(\mathcal{S}(E)) = \mathcal{R}_{G,f}(E),$$

para qualquer imersão f. Ver [5] para os detalhes. Assim, neste caso, poder-se-á trabalhar com a caracterização de álgebra de Rees mais adequada. Definições alternativas de álgebras de Rees de módulos são dadas por D. Eisenbud, C. Huneke e B. Ulrich em [8].

Bibliografia

[1] M. Brodmann, *Asymptotic stability of* $\operatorname{Ass}(M/I^nM)$, Proc. Amer. Math. Soc. 74 (1) (1979) 16–18.

[2] M. Brodmann, *The asymptotic nature of the analytic spread*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 86 (1979) 35–39.

[3] L. Burch, *Codimension and analytic spread*, Proc. Cambridge Philo. Soc. 72 (1972) 369–373.

[4] D. A. Buchsbaum, D. Rim, A generalized Koszul complex. II. Depth and multiplicity, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1965) 197–224.

[5] A. L. Branco Correia, *Arithmetical properties of the Rees algebras of modules*, Ph.D. Thesis, Universidade Técnica de Lisboa, 2004.

[6] A. L. Branco Correia, S. Zarzuela, *On the asymptotic properties of the Rees powers of a module*, J. Pure Appl. Algebra, to appear.

[7] D. Eisenbud, C. Huneke, *Cohen-Macaulay Rees algebras and their specialization*, J. Algebra 81 (1983) 202–224.

[8] D. Eisenbud, C. Huneke, B. Ulrich, *What is the Rees algebra of a module?*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (3) (2002) 701–708.

[9] T. Gaffney, *Integral closure of modules and Whitney equisingularity*, Invent. Math. 107 (1992) 301–322.

[10] D. Katz, C. Naude, *Prime ideals associated to Symmetric powers of a module*, Comm. Alg. 23(12) (1995) 4549–4555.

[11] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[12] A. Micali, *Sur les algèbres universelles*, Ann. Inst. Fourier 14 (2) (1964) 33–88.

[13] L. J. Ratliff, D. Rush, *Two notes on reductions of ideals*, Indiana Univ. Math. J. 27 (1978) 929–934.

[14] A. Simis, B. Ulrich, W. Vasconcelos, *Cohen-Macaulay Rees algebras and degrees of polynomial relations*, Math. Ann. 301 (1995) 421–444.

[15] A. Simis, B. Ulrich, W. Vasconcelos, *Rees algebras of modules*, Proc. London Math. Soc. 87 (3) (2003) 610–646.

Valores Próprios de Matrizes com Entradas Prescritas

Glória Cravo, Fernando C. Silva*

Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias
e
Universidade da Madeira

*Universidade de Lisboa

Resumo

Nas últimas décadas, vários autores estudaram os valores próprios de uma matriz quadrada A, quando algumas das entradas estão fixas e as restantes variam. Em 1975, G. N. Oliveira propôs os problemas particulares, onde $A = [A_{i,j}]$, $i, j \in \{1, 2\}$, $A_{1,1}$ e $A_{2,2}$ são matrizes quadradas e alguns dos blocos $A_{i,j}$ estão fixos e os restantes variam. Os problemas propostos por G. N. Oliveira ainda não estão completamente resolvidos. Existem várias respostas totais ou parciais para a prescrição de certos blocos, todavia existem casos por resolver.

No desenvolvimento do estudo de questões relacionadas com os problemas anteriores, considere-se a situação onde $A = [A_{i,j}]$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, os blocos $A_{i,i}$ são quadrados e alguns dos blocos $A_{i,j}$ estão fixos e os restantes variam. Neste trabalho apresentamos alguns resultados quando uma das seguintes situações ocorrer:

(i) $k = 3$; (ii) Todos os blocos $A_{i,j}$ têm o mesmo tamanho; (iii) Uma diagonal de blocos está fixa.

1 Introdução

Um problema que tem sido estudado ao longo de décadas é o seguinte:

Problema *Seja F um corpo. Sejam $c_1, \ldots, c_n \in F$. Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \in F^{n \times n}.$$

Qual é o número máximo de entradas de A que podem ser fixas arbitrariamente, de modo que A admita $c_1, \ldots, c_n$ como valores próprios?

Observe-se que, se em vez de prescrever os valores próprios em F, se prescreve o polinómio característico, obtém-se outro problema que é mais geral que o anterior, pois esta situação cobre o caso onde nem todos os valores próprios da matriz pertencem a F. Obviamente, quando se trata de corpos algebricamente fechados, a prescrição dos valores próprios em F é equivalente à prescrição do polinómio característico.

Relativamente ao problema anterior, existem várias contribuições. Em 1972, D. London e H. Minc [4] mostraram que é sempre possível prescrever $n-1$ entradas da matriz, sobre um corpo arbitrário F, e os valores próprios em F. Mostraram ainda, que este é o número máximo de entradas que é possível prescrever, simultaneamente com os valores próprios, sem exigir condições adicionais. Além disso, apresentaram dois exemplos onde a prescrição de n entradas e dos valores próprios nem sempre é possível:

(i) As n entradas prescritas são principais;

(ii) As n entradas prescritas pertencem a uma mesma linha ou coluna e são nulas as entradas não principais.

Observe-se que, no caso (i), a condição a impôr é que o traço da matriz pretendida seja igual à soma dos valores próprios e, no caso (ii) um dos valores próprios prescritos terá de coincidir com a entrada principal prescrita.

Em 1973/75, G. N. Oliveira [7, 8, 10] mostrou que, para $n > 2$ e excepto nos casos (i) e (ii), podem ser prescritas n entradas posicionadas arbitrariamente, conjuntamente com os valores próprios em F.

Mais tarde em 1983, D. Hershkowitz [3] generalizou o resultado de G. N. Oliveira, mostrando que é sempre possível prescrever $2n-3$ entradas da matriz, conjuntamente com os valores próprios em F, excepto se todas as entradas principais estiverem prescritas, ou todas as entradas de uma mesma linha ou coluna estiverem prescritas, sendo nulas as entradas não principais.

Um problema particularmente importante para o nosso trabalho é o seguinte problema de completação de matrizes, proposto por G. N. Oliveira [9], em 1975.

Problema [9] *Seja $A \in F^{n\times n}$ e sejam p, q inteiros positivos tais que $n = p+q$. Considere-se a matriz A particionada do seguinte modo*:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix},$$

onde $A_{1,1} \in F^{p\times p}$, $A_{2,2} \in F^{q\times q}$. Seja $f(x) \in F[x]$ um polinómio mónico de grau n. Supondo conhecidos alguns dos blocos $A_{i,j}, i, j \in \{1, 2\}$, em que condições existem os restantes blocos, *de modo que A tem polinómio característico $f(x)$*?

Observe-se que o enunciado anterior dá origem a, essencialmente, sete problemas distintos, de acordo com a prescrição de alguns dos blocos de A:
(P_1) $A_{1,1}$ prescrito;
(P_2) $A_{1,2}$ prescrito;
(P_3) $A_{1,1}$ e $A_{1,2}$ prescritos;
(P_4) $A_{1,1}$ e $A_{2,2}$ prescritos;
(P_5) $A_{1,2}$ e $A_{2,1}$ prescritos;
(P_6) $A_{1,1}, A_{1,2}$ e $A_{2,2}$ prescritos;
(P_7) $A_{1,1}, A_{1,2}$ e $A_{2,1}$ prescritos.

Relativamente ao problema (P_1), G. N. Oliveira apresentou uma resposta completa em [6].

A resposta completa ao problema (P_2) foi estabelecida por G. N. Oliveira em [9].

H. K. Wimmer em [17] deu uma resposta completa ao problema (P_3).

O problema (P_4) apenas tem respostas parciais que se devem a G. N. Oliveira em [12, 13] e F. C. Silva em [15].

Quanto ao problema (P_5), tal como no caso anterior, apenas são conhecidas respostas parciais, estabelecidas por G. N. Oliveira em [11], F. C. Silva em [14] e também por M. G. Marques e F. C. Silva em [5].

Em relação ao problema (P_6), quando são prescritos os valores próprios em F, F. C. Silva apresenta uma resposta em [16].

2 Resultados Principais

Neste trabalho iremos uniformizar os dois problemas apresentados na secção anterior.

Seja F um corpo arbitrário. Sejam $c_1, \ldots, c_n \in F$. Sejam $p_1, \ldots, p_k$ inteiros positivos tais que $n = p_1 + \cdots + p_k$.

Problema *Em que condições existe uma matriz da forma*:

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{k,1} & \cdots & C_{k,k} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

onde os blocos $C_{i,j}$ são de tamanho $p_i \times p_j$, com valores próprios $c_1, \ldots, c_n$, quando alguns dos blocos estão fixos e os restantes variam?

Se $p_1 = \cdots = p_k$. Suponhamos que $n = kp$.
Sejam $(r_1, s_1), \ldots, (r_{2k-3}, s_{2k-3})$ elementos distintos de $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, k\}$.
Sejam $A_{r_i,s_i} \in F^{p \times p}$, $i \in \{1, \ldots, 2k-3\}$.
E sejam $c_1, \ldots, c_n \in F$.

Teorema 1 [1] *Suponha-se que todos os blocos da primeira linha estão prescritos. Sejam $f_1(x) \mid \cdots \mid f_p(x)$ os factores invariantes de*

$$\begin{bmatrix} xI_p - A_{1,1} & -A_{1,2} & \cdots & -A_{1,k} \end{bmatrix}.$$

Existe uma matriz da forma (1), *onde os blocos $C_{i,j}$ são de tamanho $p \times p$, com valores próprios $c_1, \ldots, c_n$, tal que $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1, \ldots, 2k-3\}$, se e só se*

$$f_1 \cdots f_p \mid (x - c_1) \cdots (x - c_n).$$

Teorema 2 [1] *Suponha-se que todos os blocos principais estão prescritos. Então, existe uma matriz da forma* (1), *onde os blocos $C_{i,j}$ são de tamanho $p \times p$, com valores próprios $c_1, \ldots, c_n$, tal que $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1, \ldots, 2k-3\}$, se e só se*

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr}(A_{i,i}) = \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Teorema 3 [1] *Suponha-se que pelo menos um bloco principal está livre e, pelo menos um bloco em cada linha e em cada coluna está livre. Então, existe* *uma matriz da forma* (1), *onde os blocos* $C_{i,j}$ *são de tamanho* $p \times p$, *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$, *tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1, \ldots, 2k-3\}$.

Obviamente, para $p = 1$, a resposta encontrada generaliza o resultado estabelecido por D. Hershkowitz [3].

Suponhamos que pelo menos existem $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tais que $p_i \neq p_j$. ($C_{1,1}, \ldots, C_{k,k}$ são matrizes quadradas)

Teorema 4 [2] *Sejam* $n, k, p_1, \ldots, p_k$ *inteiros positivos tais que* $k \geq 3$ *e* $n = p_1 + \cdots + p_k$. *Sejam* σ *uma permutação de* $\{1, \ldots, k\}$, $A_{i,\sigma(i)} \in F^{p_i \times p_{\sigma(i)}}$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, k\}$. *Então existe uma matriz da forma* (1) *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$, *tal que* $C_{i,\sigma(i)} = A_{i,\sigma(i)}, i \in \{1, \ldots, k\}$, *se e só se as seguintes condições forem satisfeitas*:

(i_4) *Se* σ *é a identidade, então* $\mathrm{tr}(A_{1,1} + \cdots + A_{k,k}) = c_1 + \cdots + c_n$;

(ii_4) *Se existe* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *tal que* $\sigma(i) = i$, $p_i > n/2$ *e* $f_1 \mid \cdots \mid f_{p_i}$ *são os polinómios invariantes de* $A_{i,i}$, *então* $f_1 \cdots f_{2p_i - n} \mid (x - c_1) \cdots (x - c_n)$.

Seja F um corpo arbitrário. Sejam n, p_1, p_2, p_3 inteiros positivos tais que $n = p_1 + p_2 + p_3$. E sejam $c_1, \ldots, c_n \in F$.

Sejam (r_1, s_1), (r_2, s_2), $(r_3, s_3) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Sejam $A_{r_i,s_i} \in F^{p_{r_i} \times p_{s_i}}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Problema *Em que condições existe uma matriz da forma*:

$$C = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

onde os blocos $C_{i,j}$ *são de tamanho* $p_i \times p_j$, *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$, *tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1, 2, 3\}$?

Teorema 5 [G. Cravo e F. C. Silva] *Sejam* $c_1, \ldots, c_n \in F$. *Sejam* $A_{1,2} \in F^{p_1 \times p_2}$, $A_{1,3} \in F^{p_1 \times p_3}$, $A_{2,1} \in F^{p_2 \times p_1}$. *Existe uma matriz da forma* (2) *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$, *tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1, 2, 3\}$.

Teorema 6 [G. Cravo e F. C. Silva] *Sejam* $c_1, \ldots, c_n \in F$. *Sejam* $A_{1,1} \in F^{p_1\times p_1}$, $A_{1,3} \in F^{p_1\times p_3}$, $A_{2,3} \in F^{p_2\times p_3}$. *Sejam* $\alpha_1|\cdots|\alpha_{p_1}$ *os factores invariantes de*

$$\left[\begin{array}{cc} xI_{p_1} - A_{1,1} & -A_{1,3} \end{array}\right].$$

Então existe uma matriz da forma (2) *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$, *tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1,2,3\}$, *se e só se*

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_2} \mid (x-c_1)\cdots(x-c_n).$$

(*Convenciona-se que* $\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_2} = 1$ *se* $p_1 \leq p_2$.)

Teorema 7 [G. Cravo e F. C. Silva] *Sejam* $c_1, \ldots, c_n \in F$. *Sejam* $A_{1,1} \in F^{p_1\times p_1}$, $A_{1,2} \in F^{p_1\times p_2}$, $A_{2,3} \in F^{p_2\times p_3}$. *Sejam* $\alpha_1|\cdots|\alpha_{p_1}$ *os factores invariantes de*

$$\left[\begin{array}{cc} xI_{p_1} - A_{1,1} & -A_{1,2} \end{array}\right].$$

Então existe uma matriz da forma (2) *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$, *tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1,2,3\}$, *se e só se*

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_3} | (x-c_1)\cdots(x-c_n).$$

(*Convenciona-se que* $\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_3} = 1$ *se* $p_1 \leq p_3$.)

Teorema 8 [G. Cravo e F. C. Silva] *Sejam* $c_1, \ldots, c_n \in F$. *Sejam* $A_{1,1} \in F^{p_1\times p_1}, A_{1,3} \in F^{p_1\times p_3}, A_{2,2} \in F^{p_2\times p_2}$. *Sejam* $\alpha_1|\cdots|\alpha_{p_1}$ *os factores invariantes de*

$$\left[\begin{array}{cc} xI_{p_1} - A_{1,1} & -A_{1,3} \end{array}\right]$$

e sejam $\beta_1|\cdots|\beta_{p_2}$ *os polinómios invariantes de* $A_{2,2}$. *Então existe uma matriz da forma* (2) *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$, *tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1,2,3\}$, *se e só se*

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_2} \beta_1 \cdots \beta_{p_2-(p_1+p_3)} | (x-c_1)\cdots(x-c_n).$$

(*Convenciona-se que* $\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_2} = 1$ *se* $p_1 \leq p_2$ *e* $\beta_1 \cdots \beta_{p_2-(p_1+p_3)} = 1$ *se* $p_2 \leq p_1 + p_3$.)

Teorema 9 [G. Cravo e F. C. Silva] *Sejam* $c_1, \ldots, c_n \in F$. *Sejam* $A_{1,1} \in F^{p_1\times p_1}, A_{1,2} \in F^{p_1\times p_2}, A_{2,2} \in F^{p_2\times p_2}$. *Sejam* $\alpha_1|\cdots|\alpha_{p_1}$ *os factores invariantes de*

$$\left[\begin{array}{cc} xI_{p_1} - A_{1,1} & -A_{1,2} \end{array}\right]$$

e $\beta_1|\cdots|\beta_{p_2}$ *os factores invariantes de*

$$\begin{bmatrix} -A_{1,2} \\ xI_{p_2} - A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Então existe uma matriz da forma (2) *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$*, tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}, i \in \{1,2,3\}$ *, se e só se*

$$\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_3}\beta_1 \cdots \beta_{p_2-p_3}|(x-c_1)\cdots(x-c_n).$$

(*Convenciona-se que* $\alpha_1 \cdots \alpha_{p_1-p_3} = 1$ *se* $p_1 \leq p_3$ *e* $\beta_1 \cdots \beta_{p_2-p_3} = 1$ *se* $p_2 \leq p_3$*.*)

Teorema 10 [G. Cravo e F. C. Silva] *Sejam* $c_1, \ldots, c_n \in F$*. Sejam* $A_{1,2} \in F^{p_1 \times p_2}$, $A_{1,3} \in F^{p_1 \times p_3}$, $A_{2,3} \in F^{p_2 \times p_3}$*. Então existe uma matriz da forma* (2) *com valores próprios* $c_1, \ldots, c_n$*, tal que* $C_{r_i,s_i} = A_{r_i,s_i}$*,* $i \in \{1,2,3\}$ *.*

References

[1] G. Cravo and F. C. Silva. Eigenvalues of matrices with several prescribed blocks. *Linear Algebra Appl.*, 311:13–24, 2000.

[2] G. Cravo and F. C. Silva. Eigenvalues of matrices with several prescribed blocks II. *Linear Algebra Appl.*, 364:81–89, 2003.

[3] D. Hershkowitz. Existence of matrices with prescribed eigenvalues and entries. *Linear and Multilinear Algebra*, 14:315–342, 1983.

[4] D. London and H. Minc. Eigenvalues of matrices with prescribed entries. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 34:8–14, 1972.

[5] M. G. Marques and F. C. Silva. The characteristic polynomial of a matrix with prescribed off-diagonal blocks. *Linear Algebra Appl.*, 250:21–29, 1997.

[6] G. N. Oliveira. Matrices with prescribed characteristic polynomial and a prescibed submatrix III. *Monasth. Math.*, 75:441–446, 1971.

[7] G. N. Oliveira. Matrices with precribed entries and eigenvalues. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 37:380–386, 1973.

[8] G. N. Oliveira. Matrices with prescribed entries and eigenvalues II. *SIAM J. Appl. Math.*, 24:414–417, 1973.

[9] G. N. Oliveira. Matrices with prescribed characteristic polyomial and several prescribed submatrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 2:357–364, 1975.

[10] G. N. Oliveira. Matrices with prescribed entries and eigenvalues III. *Arhiv der Math.*, 26:57–59, 1975.

[11] G. N. Oliveira. The characteristic values of the matrix $A+XBX^{-1}$. *Proceedings of the Colloquium on Numerical Methods, Keszthely, Hungary*, pages 491–500, 1977.

[12] G. N. Oliveira. Matrices with prescribed characteristic polynomial and principal blocks. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 24:203–208, 1981.

[13] G. N. Oliveira. Matrices with prescribed characteristic polynomial and principal blocks II. *Linear Algebra Appl.*, 47:35–40, 1982.

[14] F. C. Silva. Matrices with prescribed characteristic polynomial and submatrices. *Portugal. Math.*, 44:261–264, 1987.

[15] F. C. Silva. Matrices with prescribed eigenvalues and principal submatrices. *Linear Algebra Appl.*, 92:241–250, 1987.

[16] F. C. Silva. Matrices with prescribed eigenvalues and blocks. *Linear Algebra Appl.*, 148:59–73, 1991.

[17] H. K. Wimmer. Existenzsätze in der theorie der matrizen und lineare kontrolltheorie. *Monasth. Math.*, 78:256–263, 1974.

José Anastácio da Cunha e a Álgebra do seu tempo

Maria Fernanda Estrada[a] e Maria do Céu Silva[b]

[a] Centro de Matemática, Universidade do Minho, e-mail: festrada@math.uminho.pt

[b] Centro de Matemática, Universidade do Porto, e-mail: mcsilva@fc.up.pt

Resumo

Evocar José Anastácio da Cunha é sempre um privilégio. A sua curta vida, as circunstâncias em que foi vivida e a obra que nos deixou geram em nós um misto de respeito, admiração e carinho. Entendemos, por isso, como uma questão de justiça divulgar o seu nome e a sua obra. Para tal, estruturámos o nosso trabalho de acordo com o seguinte esquema:

I. Vida e obra de José Anastácio da Cunha

II. Conteúdo e estrutura dos *Principios Mathematicos*

III. O livro X dos *Principios Mathematicos*

IV. O Manuscrito

1 Vida e obra de José Anastácio da Cunha

Para facilitar a abordagem que nos propusemos, e dado que a vida de José Anastácio da Cunha foi rica em vivências diversificadas, parece-nos importante considerar as seguintes etapas da sua vida, que foram transversalmente atravessadas por todo o seu período criativo: a) Discípulo da Congregação do Oratório, em Lisboa b) Oficial artilheiro, em Valença do Minho c) Lente de Geometria na Universidade de Coimbra d) Professor no Colégio de S. Lucas, da Real Casa Pia de Lisboa.

a) Discípulo da Congregação do Oratório, em Lisboa.

José Anastácio da Cunha nasceu em Lisboa em 11/4/1744, sendo filho de pais modestos. O pai, Lourenço da Cunha, era pintor de profissão; foi ele quem pintou, entre outros, os tectos das capelas da Igreja dos Clérigos dos Pobres e de S. Domingos de Benfica. VolKmar Machado diz sobre ele que "foi o maior pintor português que temos tido no género de arquitectura e perspectiva"[1]. A mãe, Jacinta Inês, era natural de Tomar e foi criada desde pequena em casa do Tesoureiro-Mor do Reino, Manuel Sande Vasconcelos. Vários testemunhos posteriores apontam-na como pessoa de bem, delicada e estimada.

Não sendo José Anastácio da Cunha filho de pessoas abastadas, foram possivelmente os conhecimentos influentes dos pais que fizeram com que fosse educado na Congregação do Oratório, em Lisboa. Aí, foi discípulo do Padre Joaquim de Foyos e do Padre Teodoro de Almeida, com os quais viria a travar uma amizade que perdurou para toda a vida. Na Congregação do Oratório aprendeu Gramática, Retórica e Filosofia e o estudo das línguas que lhe foi ministrado incluíu o latim e o grego, além do francês. Como ele mesmo afirmou[2], a língua inglesa aprendeu-a, facilmente, por si e a "Matemática e Física por sua curiosidade e sem mestre". Recorde-se que à Congregação do Oratório[3] é atribuída a introdução dum ensino experimental em Portugal, com a instalação dos primeiros laboratórios. Talvez tenha sido a abertura a este tipo de ensino, não de todo habitual na época, que contribuiu para despertar e estimular no jovem José Anastácio da Cunha o gosto por outros conhecimentos. Em 1763, pelos dezanove anos de idade, José Anastácio da Cunha terá abandonado a Congregação

[1] Cunha, José Anastácio, *notícias literárias de Portugal 1780.* Tradução, prefácio e notas de Joel Serrão. Lisboa, Seara Nova, 1971, p 10.

[2] Ferro, J.P., *O processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778).* Lisboa, Palas, 1987, p. 144.

[3] A Congregação do Oratório foi fundada por S. Filipe de Néri, aprovada em Itália, em 1575, e em Portugal, em 1672. Por isso, os Oratorianos são muitas vezes referidos como os "Néris".

do Oratório.

b) Oficial artilheiro, em Valença do Minho

Não nos foi possível determinar, com precisão, a data e as condições do ingresso de José Anastácio da Cunha no exército português. Ter-se-á alistado por causa da chamada *guerra fantástica*, contra a coligação franco-espanhola? Terá procurado um Regimento de Artilharia, que lhe proporcionasse a continuação de um estudo experimental? O que sabemos é que, em 1762, o Marquês de Pombal chamou a Portugal um príncipe alemão, o conde Wilhelm Von Schaumburg-Lippe[4], a quem confiou o encargo do comando e reorganização do exército português. Esta tarefa passou também pelo contrato de mercenários de outros países europeus, nomeadamente alemães, franceses, ingleses e italianos. Em 1763, o conde de Lippe pôs fim à *guerra fantástica* e criou um novo Regimento de Artilharia no Porto, aquartelado em Valença do Minho, integrado no plano de que fora incumbido; ainda nesse mesmo ano, decretou a existência de aulas de Artilharia, obrigatórias para oficiais e praças dos Regimentos de Artilharia. O plano que delineou para estas aulas era tão detalhado, que ia até à obrigatoriedade dos livros a utilizar e à interdição de quaisquer outros; e sobre as matérias ensinadas eram prestadas provas, indispensáveis nas promoções.

Embora nos depoimentos que prestou na Inquisição José Anastácio da Cunha tenha dito que aos 19 anos lhe ofereceram a patente de tenente de Bombeiros para o Regimento de Artilharia do Porto, aquartelado em Valença, ele só foi nomeado para este mesmo Regimento por Decreto do Conselho de Guerra de 25/6/1764. De qualquer modo, a sua colocação como militar foi em Valença do Minho, embora, mais tarde, tenha sido temporariamente deslocado para Almeida, regressando, depois, a Valença.

Cerca de um terço do Regimento instalado em Valença era formado por oficiais estrangeiros. Estes militares tinham várias proveniências e, na sua maioria eram protestantes, facto que, por si só, era suficiente para serem considerados hereges, face à ortodoxia vigente. Como se isso não bastasse, esses homens, de espíritos ousados e aventureiros, mas também cultos e sabedores, trouxeram consigo muitos dos livros então proibidos em Portugal e que, um pouco por toda a Europa, espalhavam as ideias liberais que a Revolução Francesa viria a consolidar. Dos oficiais estrangeiros colocados em Valença[5], aqueles com quem José Anastácio da Cunha privou mais intimamente foram Diogo Ferrier (James), de

[4]Marques, A.H. Oliveira, *História de Portugal*, 10^a ed, vol II, Lisboa, 1984, p. 356-7.

[5]Entre os seus amigos, contava-se o colega João Baptista Vieira Godinho, de origem brasileira.

origem escocesa, engenheiro de fortificação e professor das aulas de Artilharia; Simão Frazer, também escocês, que foi o sargento-mor do Regimento e que antes fora capitão da Companhia de Mineiros; Ricardo Muller, inglês, que, em 1765, foi colocado em Valença como capitão e Frederico von Heymenthal, o barão de Heymenthal, de origem alemã, que ingressou no Regimento de Valença em 1765, como 1º tenente.

José Anastácio da Cunha ter-se-á integrado muito bem neste meio, já que a barreira linguística não constituía obstáculo para ele. No Regimento, especialmente nas reuniões nocturnas com os seus companheiros mais íntimos, tudo se discutia, desde a literatura à religião. Eram frequentes as tertúlias literárias, onde imperava o Iluminismo europeu e onde se liam e comentavam obras de Voltaire, Racine e Shakespeare, entre outros. Muitas poesias foram traduzidas por José Anastácio da Cunha, especialmente a pedido de Diogo Ferrier e circulavam entre os elementos do Regimento. Destacamos, entre elas, a "Oração Universal"[6], de Pope e o "Deo Optimo, Maximo"[7], de Voltaire.

Estas poesias devem ter causado tal impacto no meio que, anos mais tarde, militares do Regimento, que testemunharam no Tribunal da Inquisição, as recitavam de cor, justificando que, de tantas vezes as ouvirem, as decoraram. Foi este um dos primeiros "crimes"de que José Anastácio de Cunha viria a ser acusado pela Inquisição.

Mas, um outro crime, ainda mais grave, que lhe seria imputado, foi o seu amor por Margarida Lopes, com quem viveu maritalmente em Valença, não sendo casado. Foi a ela que José Anastácio da Cunha dedicou a maior parte dos seus poemas[8].

---

[6] "...Pai de tudo, adorado em toda a idade
Dos polos ao equador,
Por bárbaros, por santos, por sábios
Jove, Jehovah, Senhor...". Em Cidade, Hernâni, *A Obra Poética do Dr. José Anastácio da Cunha*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1930, p. 107.

[7] As frases iniciais e finais são:
"Ó Deus! A quem tão mal o homem conhece
Ó Deus! A quem todo o Universo aclama!
(...); e crer não posso Que um Deus que o ser me deu, um Deus que tantas
Bençãos lançado tem sobre os meus dias,
Depois de extintos estes, finalmente
Me haja de atormentar eternamente."Em Ob.Cit, p. 138.

[8] Um desses poemas, "O Abraço", foi escolhido para integrar uma colecção da Portugália Editora, intitulada *As mais belas líricas portuguesas*. Desse poema transcrevemos as 1^{as} quadras:
"Alta rocha, sustém-me que esmoreço
De amor não sei se estou para expirar...
Como me anseia!... Enquanto em vão faleço

Tão contundentes foram considerados os poemas de José Anastácio da Cunha, que a primeira publicação que deles fez Inocêncio Francisco da Silva, em 1839, já durante o regime liberal, lhe trouxe como consequência ter sido processado por "abuso de liberdade de imprensa em matéria religiosa". E todos os exemplares à venda foram apreendidos![9]

Hoje, sabe-se como a sua obra poética foi apreciada por vultos tão significativos da literatura portuguesa como Garrett, Pessoa e Hernâni Cidade. Este último, em 1930, editou todos os poemas de José Anastácio de Cunha, que conseguiu coligir. Além disso, a sua vida inspirou um dos romances de Aquilino Ribeiro, *Anastácio da Cunha, O lente penitenciado*, editado em 1938. Camilo Castelo Branco dedicou-lhe, também, algumas páginas da sua obra *Noites de Insónia*. Devemos ainda referir que, recentemente, começou a ser publicada a *Obra Literária de José Anastácio da Cunha*, na Colecção Obras Clássicas da Literatura Portuguesa (século XVIII). O primeiro volume foi publicado em 2001, e a edição é da responsabilidade de Maria Luísa Malato Borralho e Cristina Alexandre de Marinho, depois de terem descoberto um outro manuscrito com a sua obra poética, no Arquivo Distrital de Braga.

Não queremos, com o que ficou dito, levar o leitor a pensar que só a poesia interessava a José Anastácio da Cunha no período em que viveu em Valença do Minho; a Matemática e a Física foram também objecto das suas paixões, ocupando nelas muito do seu tempo. Pode afirmar-se que nessa época ele compôs: o *Ensaio sobre as Minas* e a *Carta Fisico-Mathematica*.

O *Ensaio sobre as Minas* é, pelo que sabemos, a primeira obra científica de José Anastácio da Cunha e, como ele mais tarde viria a afirmar, no contexto da polémica com José Monteiro da Rocha, foi composto a pedido do capitão da Com-

---

Com a noite quero aqui desabafar.
Ó meu, ó meu amor, aonde fugiste?
Onde estou eu agora e onde estava?
A alma começa a conhecer que existe,
Que até agora sabia só que amava.
Não estive num mar quasi afogado,
De impável, angélica ternura?...
Respiro apenas... Inda estou cercado
De estranha, grossa nuvem de luz pura."

Em Ob. Cit. p. 48.

[9] Silva, Inocêncio Francisco, *Dicionário Bibliográfico Português*, tomo 4, Lisboa, 1973. Reimpressão da edição publicada em Lisboa, em 1860.

panhia de Mineiros[10]. Embora a data de composição do *Ensaio sobre as Minas* não seja conhecida, sabemos que é anterior a 1769, pois, neste ano, Anastácio da Cunha escreveu a *Carta Fisico-Mathematica*, onde há uma referência inequívoca a um trabalho sobre as minas, realizado anteriormente. O *Ensaio sobre as Minas* teria sido oferecido ao conde de Lippe sem o conhecimento de José Anastácio da Cunha, e provocou o seu descontentamento, a ponto de ter mandado prender José Anastácio da Cunha por alguns dias, já que ele aí criticava duramente os autores dos livros preconizados pelo general para as Aulas de Artilharia. Porém, como José Anastácio da Cunha afirma, o general acabou por lhe dar razão e deixou recomendado que "lhe dobrassem o soldo e o adeantassem"[11].

O rasto do manuscrito do *Ensaio sobre as Minas* perdeu-se, não sendo sequer citado por Inocêncio[12]. Talvez a justificação para este facto se possa encontrar no depoimento do próprio José Anastácio na polémica com Monteiro da Rocha.

Uma cópia do manuscrito foi descoberta no Arquivo Distrital de Braga por Maria Fernanda Estrada, em 1988, e publicada em 1994, com o título original *Ensaio sobre as Minas*, com *Leitura, Introdução e notas* de Maria Fernanda Estrada.

A *Carta Fisico-Mathematica* é uma pequena memória sobre balística, escrita em 1769. Foi composta a pedido do major Simão Frazer, como José Anastácio

[10] *Actas do Colóquio Internacional, Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta.* Lisboa, Imprensa Nacional, 1990, p. 382.

[11] Idem, p. 382.

[12] No *Dicionario Bibliográfico Português*, 1860, tomo 4.

da Cunha afirma logo no início da obra. Há uma grande semelhança na estrutura deste trabalho e do anterior: mesmo tipo de críticas a certos autores, mesma exaltação de outros, especialmente de Newton, mesmo método de exposição – uma espécie de método geométrico – para evitar a prolixidade que José Anastácio da Cunha diz detestar.

Nas suas investigações matemáticas, José Anastácio da Cunha não se limitou a estes dois trabalhos: pelo menos uma parte da obra, mais tarde editada sob o título de *Principios Mathematicos* foi concebida e até escrita em Valença. Sabe-se também que o primeiro título dessa obra foi o de *Arithmetica Universal*. No ponto II. deste trabalho, referir-nos-emos mais detalhadamente a este assunto.

A finalizar as referências a este período da vida de José Anastácio da Cunha em Valença, queremos deixar duas notas. A primeira diz respeito a um militar de Valença, João Baptista Vieira Godinho. Este colega de José Anastácio da Cunha era natural de Minas Gerais, Brasil (1742-1811). Frequentou a Academia Militar de Lisboa e na sua carreira de oficial passou por Valença do Minho, onde conviveu com José Anastácio da Cunha. Posteriormente, já no Brasil, chegou a tenente general em 1809. Era um admirador dos seus trabalhos, que tentou coligir, copiando-os, e divulgando-os com o nome do autor. Inocêncio Francisco da Silva considera-o amigo íntimo de José Anastácio da Cunha, e refere que ele "teve em seu poder muitas composições de José Anastácio da Cunha". Diz ainda que, antes de morrer, ele confiou esses trabalhos ao conde de Linhares, D. Rodrigo de Sousa Coutinho, então no Brasil. Embora José Anastácio da Cunha tenha dito que não confiava muito em João Baptista Godinho, porque ele tinha obtido cópias dos seus trabalhos sem autorização sua[13], a verdade é que talvez hoje lhe devamos o facto de esses trabalhos não se terem perdido.

É João Baptista Vieira Godinho o compilador das poesias publicadas por Hernâni Cidade a partir do manuscrito existente na Biblioteca Municipal do Porto. É ainda ele o compilador das *notícias literárias de Portugal 1780*, obra traduzida e editada, em 1971, por Joel Serrão, que encontrou o manuscrito, em francês, no Arquivo Nacional do Rio de Janeiro. Este manuscrito, ainda que não autografado, está registado como da autoria de José Anastácio da Cunha.

[13]Em *O Processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra* (1778), Lisboa, Palas, 1987, pp. 147-148.

A segunda nota diz respeito a uma carta[14], escrita pelo major Simão Frazer, antes de regressar a Inglaterra, onde ele nos traça um retrato de José Anastácio da Cunha. Transcrevemos aqui algumas partes dessa carta: "Não posso deixar Valença sem falar de um dos génios mais extraordinários que jamais se ouviu (...) veio a ser, por força do seu engenho e grande aplicação, um prodígio deste século. É tão grande matemático que o coronel Ferrier, profundo nesta ciência, me diz que este moço o excede em muito. Ele é senhor de todas as obras de Sir Isaac Newton, ainda naquelas partes mais escuras, que os mesmos matemáticos julgam dificultosas; conseguintemente, é um algebrista completo e um astrónomo. (...) Mas, o que é ainda mais extraordinário, este moço acrescenta a esta aplicação (que absorve a atenção de todos os que a estudam) um perfeito conhecimento da história, das línguas e das belas-letras. É excelente poeta e bom crítico nas línguas mortas; sabe muito bem a italiana, francesa, espanhola e inglesa; e o coronel Ferrier, que possui perfeitamente estas línguas e pode ser juiz competente, afirma que este moço escreve a sua própria língua com mais pureza que muitos, e talvez que qualquer dos autores mais célebres deste país (...) Parece que não emprega o seu tempo em estudar e, pela sua timidez, não conversa, ainda que nas matérias mais indiferentes, senão com os mais íntimos amigos. (...) é versado em todo o género de ciência e literatura. Com os seus amigos, várias vezes recita algumas das melhores obras dos nossos poetas ingleses, particularmente Shakespeare e faz nele tal efeito a sua recitação que parece arrebatar-se; e nessas ocasiões uma só gota de vinho do Porto, de que ele gosta, o faz inebriar. Este

[14] Publicada por Nolasco da Cunha no *Investigador Portuguêz*, em Julho de 1812, p. 30-43. Reproduzido em "notícias literárias de Portugal 1780"tradução, prefácio e notas de Joel Serrão, *Seara Nova*. Lisboa, 1971, p. 11-13.

homem extraordinário parece a qualquer desconhecido um simples. Ri-se muito, e em todo o seu proceder não se descobre nenhuma daquelas excelências de que é ricamente adornado".

c) Lente de Geometria na Universidade de Coimbra

Quando, em 1772, o Marquês de Pombal reformou a Universidade de Coimbra, lembrou-se de Anastácio da Cunha para aí ensinar. Não tinham caído no esquecimento as palavras elogiosas que sobre José Anastácio da Cunha tinham pronunciado o conde de Lippe e o tenente general Francisco Macleane. Este último chegou mesmo a afirmar que "elle sabia mais do que a maior parte dos Marechaes de França, de Inglaterra e da Allemanha"e que "he um d'aquelles homens raros que nas nações cultas costumam aparecer"[15].

Com estas excelentes referências, em carta de 5 de Outubro de 1773, o Marquês de Pombal comunica ao reitor da Universidade de Coimbra, D. Francisco de Lemos, que nomeara José Anastácio da Cunha para a regência de Geometria na Universidade. Dias depois, noutra carta ao reitor, o Marquês de Pombal enaltece, de novo, José Anastácio da Cunha, dizendo: "Tenho por certo que o Professor de Geometria há-de fazer uma boa parte do ornamento litterario dessa Universidade, e que com o génio suave que se lhe conhece, conduzirá os seus discípulos a aprenderem com gosto e diligência uma disciplina, tão proveitosa como esta para todas as Faculdades positivas"[16].

José Anastácio da Cunha abandona, então, Valença do Minho e passa a viver em Coimbra com a mãe, depois da amada Margarida ter regressado à sua terra. Em Coimbra, José Anastácio da Cunha continua a revelar-se individualista e ousado no romper com as tradições de que discordava. Assim, embora com a autorização dos seus superiores, dá as aulas com o uniforme de oficial artilheiro, recusando as vestes académicas que usavam os seus colegas. Vemos neste gesto de José Anastácio da Cunha uma identificação assumida com o seu estatuto de militar. Como ele próprio declarou, compôs os seus dois primeiros trabalhos a pedido dos seus chefes no Exército. Particularmente o *Ensaio sobre as Minas* revela uma preocupação pedagógica, incluindo uma parte prática dirigida aos soldados menos cultos. Mesmo a sua obra maior, *Principios Mathematicos*, será composta, como ele afirmou, para "poder ser útil ao público e ao Estado"[ver parte II deste trabalho]. Este espírito de serviço dentro do corpo militar será mais

[15] Freire, F.C., *Memoria Histórica da Faculdade de Mathematicas.* Coimbra, Imprensa da Universidade, p. 35.

[16] Idem. Ob. Cit., p. 34.

uma vez revelado quando, mais tarde, escreve: "je ne suis pas homme de lettres, je n'ai été qu'un soldat"[17]. José Anastácio da Cunha mostra-se também ousado ao procurar romper com a rotina do ensino, dentro do espírito dos Estatutos: "[...] Não me demorava em ler ou repetir litteralmente (como os meus companheiros costumavam) as proposições que por fáceis nem carecem de explicação, nem a admitem, só para poder empregar tempo sufficiente em indicar aos estudantes as verdadeiras difficuldades da lição e facilitar-lh'as quanto as minhas ténues forças o permitiam... . Porém queria que também os estudantes trabalhassem, e os obrigava a resolver problemas"[18].

Apesar do esforço desenvolvido com o intuito de uma participação activa dos estudantes, José Anastácio da Cunha não conseguiu implementar os seus métodos e teve de se submeter à prática vigente. Também não conseguiu, contra sua vontade, realizar quaisquer trabalhos de campo, por falta de instrumentos. Mas continuou, em Coimbra, a promover reuniões nocturnas em sua casa, onde juntava os amigos e discípulos mais íntimos. Desse grupo faziam parte os irmãos Sousa Coutinho, D. Domingos António, D. Rodrigo e D. José António, filhos de D. Francisco Inocêncio Sousa Coutinho e ainda D. José Maria e D. António, sobrinhos do mesmo D. Francisco Inocêncio, e José Telles. A participação de José Anastácio da Cunha nessas reuniões já não seria tão activa como nas de Valença, que atrás referimos. Como ele mesmo disse[19] mais tarde, só incidentalmente jogava xadrez com eles, ocupando antes todo o tempo nas suas meditações e nos seus estudos de Matemática, pelo que muitas vezes se alheava das conversas gerais.

Com a queda do Marquês de Pombal, seu protector, e com a subida ao trono de D. Maria I, José Anastácio da Cunha é arrastado nessa mesma queda. É preso pela Inquisição em 1/7/1778 e acusado de vários crimes, a maior parte dos quais remontavam à sua passagem por Valença do Minho[20].

A 9 de Setembro de 1778 é lido o libelo acusatório, e em 15 de Setembro já estavam concluídos os autos, confirmados em Lisboa em 6 de Outubro. Saiu em

[17] *notícias literárias de Portugal 1780*, tradução, prefácio e notas de Joel Serrão, *Seara Nova*. Lisboa, 1971, p. 70.

[18] *Actas do Colóquio Internacional, Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta*. Lisboa, Imprensa Nacional, 1990. p. 386.

[19] Ferro, J.P., *O processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778)*. Lisboa, Palas, 1987, p. 147.

[20] No seu processo da Inquisição depuseram doze testemunhas de acusação, que o acusaram, entre outros, dos seguintes "crimes": Deísmo, Tolerantismo, Libertinismo, Indiferentismo; Faltar à missa aos domingos; Comer carne nos dias proibidos; Embriagar-se; Participar nas exéquias fúnebres de um cão do capitão Ricardo Muller, como se se tratasse de um funeral católico; Viver com Margarida Lopes numa relação condenada pela igreja; Fazer traduções de obras perniciosas atentatórias da moral vigente.

auto de fé em 11 de Outubro de 1778, com vela na mão e hábito penitencial. Foi condenado à confiscação dos seus bens, à interdição de voltar a Coimbra e a Valença, à reclusão por 3 anos na Congregação do Oratório de Nossa Senhora das Necessidades em Lisboa, e ao degredo em Évora por 4 anos.

No mesmo auto saiu João Manoel de Abreu, seu amigo e discípulo, que foi condenado à confiscação dos bens e à pena de três anos de reclusão na casa dos padres da Congregação da Missão, em Rilhafoles[21].

d) Professor do Colégio de S. Lucas, da Real Casa Pia de Lisboa

Da sentença da Inquisição, José Anastácio da Cunha cumpriu apenas parte dos três anos de reclusão na Casa do Oratório de Lisboa; foi-lhe perdoado o degredo em Évora, mas manteve-se a interdição de voltar a Coimbra e a Valença. Além disso, perdeu um bem inestimável: a sua biblioteca. Deve ter sido durante esse tempo que escreveu as *notícias literárias de Portugal 1780*, a que já nos referimos, onde denuncia a amargura e o desencantamento da vida e do país onde vive, país que critica com dureza e desassombro, mas que não deixou de amar.

Em 23 de Janeiro de 1781, saiu em liberdade. Foi, então, nomeadoprofessor substituto e director de estudos no Colégio de S. Lucas na Real Casa Pia de Lisboa, a convite do Intendente Pina Manique, que também lhe confiou a educação da sua filha.

Este tempo vai ser fértil para a consecução da obra de José Anastácio da Cunha.

É em 1782 que se inicia a impressão dos *Principios Mathematicos*, que só viria a ser terminada em 1790, já depois da morte do seu autor. Supõe-se que é, também, deste período a composição do *Ensaio sobre os Princípios de Mechanica*, que ele terá escrito a rogo de um dos seus alunos da Casa Pia, Manuel Pedro de Melo. Este trabalho foi editado em Londres, em 1807, por D. Domingos António de Sousa Coutinho. É ainda desta época uma carta muito interessante que, em 3 de Junho de 1785, José Anastácio da Cunha escreveu a João Manoel de Abreu. Nessa carta, além de diversas proposições matemáticas e do apreço que revela pelo amigo, há uma curiosa mistura de expressões em francês, inglês, latim, italiano, no geito das cartas do amigo Diogo Ferrier[22]. Terá sido ainda aqui que escreveu os trabalhos até agora considerados perdidos?

São, também, os anos da célebre polémica entre José Anastácio da Cunha e José Monteiro da Rocha, polémica que nos revela muitos aspectos curiosos da

[21] *Dicionário Bibliográfico Português*, 1860, tomo 3.

[22] Ferro, J.P., *O processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778)*. Lisboa, Palas, 1987, pp. 67-68.

vida e personalidade de José Anastácio da Cunha e que, supomos, o terá também atormentado.

A doença, a que não terão sido alheias a tristeza e o descontentamento, vitimou-o muito cedo. José Anastácio da Cunha morreu em 1 de Janeiro de 1787, com apenas 42 anos de idade. Na noite anterior tinha acabado de corrigir as provas dos *Principios Mathematicos*. As suas últimas palavras registadas numa carta de D. Domingos António Sousa Coutinho são pungentes, no que exprimem de recordação simultaneamente doce e amarga: "Some dreams of humanity, qui me déchirent plutôt qu'ils ne me consolent"[23].

Anastácio da Cunha deixou amigos e discípulos que souberam honrar a sua obra e imortalizar o seu nome. Entre eles estão João Manoel de Abreu, Anastácio Joaquim Rodrigues e os brilhantes alunos casapianos, que viriam a ser lentes da Universidade de Coimbra, Manuel Pedro de Mello, José Joaquim Rivara e Tristão Álvares da Costa Silveira.

Dos seus amigos, foi João Manoel de Abreu quem corporizou o projecto comum de divulgação da sua obra e do seu nome, traduzindo os *Principios Mathematicos*, em francês.

2 Conteúdo e estrutura dos *Principios Mathematicos*

O nosso propósito não é expor aqui um estudo pessoal sobre os *Principios Mathematicos*. Apenas pretendemos divulgar o conteúdo desta obra, salientando alguns aspectos particulares de vários estudos, que dela têm feito investigadores portugueses e estrangeiros.

Como curiosidade, começamos por observar que, no verso da folha de rosto da edição original dos *Principios Mathematicos* consta o seguinte: "Foi taixado este Livro em papel a mil e seiscentos reis. Meza 19 de Abril de 1790". Ora, por carta régia de 4 de Junho de 1785, era ordenado que o vencimento do lente de Astronomia da Faculdade de Mathematica[24] passasse a ser 800$000 reis por ano. Contas feitas (!) e estabelecida a respectiva correspondência com os vencimentos actuais, concluímos que o preço não deveria andar muito longe dos 100 euros. Tratando-se de um volume pequeno, com apenas 302 páginas, pensamos nós que só o valor do conteúdo poderia justificar tão elevado preço, embora não seja

[23] Braga, Teófilo, *História da Universidade de Coimbra*. Lisboa, Typographia da Academia Real das Sciencias, 1898, p. 500.

[24] Lembramos que este era o lente de Matemática que auferia maior vencimento.

plausível que tenha sido essa a razão.

As diferentes fases de redacção da obra são indicadas por Jaime Carvalho e Silva e António Leal Duarte em "Os "Principios Mathematicos" de José Anastácio da Cunha"[25], que apresentam a seguinte cronologia:

1766 - Início da redacção [em Valença do Minho]

1771 - Já estaria escrita (pelo menos em parte) uma primeira versão manuscrita (Arithmetica Universal) [Influência Newtoniana?]

1772 - Estaria pronta a versão manuscrita da Arithmetica Universal

1776 - Apresentação de uma versão de parte dos Principios Mathematicos ao Conselho da Faculdade de Matemática

1778 - Os Principios Mathematicos estavam redigidos

1782 - Circulavam em Lisboa os primeiros capítulos já impressos - João Manoel de Abreu, no prefácio da edição francesa, refere este facto e acrescenta que José Anastácio da Cunha os usava nas suas aulas à medida que iam sendo acabados de imprimir

1785 - Já estaria impressa uma boa parte da obra

1786 - 31 de Dezembro, Anastácio da Cunha corrige a última folha desta obra

1790 - A obra é publicada em Lisboa

1811 - É publicada em Bordéus a tradução francesa, de João Manoel de Abreu

1816 - É editada em Paris a 2^a edição da tradução francesa

É esta ordenação que vamos seguir, documentando estes períodos com diversos textos.

A primeira versão manuscrita da obra intitulava-se *Arithmetica Universal*, como o atestam várias passagens. Uma delas diz respeito a uma observação do próprio José Anastácio da Cunha no *Ensaio sobre as Minas*, feita aquando do tratamento das Secções Cónicas[26]. Uma outra refere-se a uma carta (de 1771) de João Baptista Vieira Godinho a José Anastácio da Cunha, pedindo-lhe extractos

[25] *Actas do Colóquio Internacional, Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta.* Lisboa, Imprensa Nacional, 1990, p. 82.

[26] Joze Anastácio da Cunha, *Ensaio sobre as Minas*, Leitura, introdução e notas de Maria Fernanda Estrada. Arquivo Distrital de Braga, 1994, p. 7.

de obras suas, nomeadamente da *Arithmetica Universal*[27]. Uma terceira consta de uma carta, enviada a Anastácio da Cunha (em 1772), pelo Padre Joaquim de Foyos, em que ele diz já ter lido e apreciado dois dos livros da *Arithmetica Universal*[28].

Além disso, perante o Tribunal da Inquisição, em 1778, José Anastácio da Cunha exprime o desejo de, depois de liberto, ser recolhido na Congregação do Oratório de Lisboa para poder "ser útil ao público e ao Estado, dando à luz, huma obra que hé a baze de toda a Mathemática em que trabalha há 12 anos com a mais assídua e incansável aplicação e que já tinha completa ao tempo da sua prisão e só lhe faltava por a limpo"[29].

Os *Principios Mathematicos*

Esta obra não tem prefácio nem índice. É constituída por vinte e um Livros (ou Capítulos), sem título, numerados de I a XXI. Alguns deles recorrem a figuras que são apresentadas no final do texto. Tem, além disso, uma errata que ocupa 13 páginas numeradas de 3 a 15. Os livros que constituem os *Principios Mathematicos* são:

Livro I - trata da geometria dos triângulos

Livro II - estuda a geometria do círculo

Livro III - diz respeito à teoria das proporções

Livro IIII - aborda questões de aritmética elementar (soma, diferença, produto e quociente de números decimais e de fracções, raiz quadrada e raiz cúbica)

Livro V - estuda a semelhança de polígonos

Livro VI- trata a geometria dos sólidos

Livro VII - versa sobre a geometria do círculo, polígonos inscritos e circunscritos

Livro VIII - consiste em elementos de álgebra (operações com monómios e polinómios)

Livro VIIII - estuda séries e sua convergência (série exponencial e logarítmica; definição das potências de expoente qualquer; binómio de Newton)

Livro X - diz respeito à resolução numérica de equações algébricas

Livro XI - estuda sistemas de equações e problemas práticos

Livro XII - trata problemas de análise diofantina

Livro XIII - diz respeito à construção de equações e solução de problemas geométricos

[27] Ferro, J.P., *O processo de José Anastácio da Cunha na Inquisição de Coimbra (1778).* Lisboa, Palas, 1987, p. 73

[28] Idem, p.79.

[29] Idem, p.139.

Livro XIIII - diz respeito à geometria analítica; secções cónicas

Livro XV - estuda o cálculo diferencial (definição de infinito e de infinitamente pequeno)

Livro XVI - versa sobre trigonometria plana e esférica

Livro XVII - estuda a geometria diferencial das curvas; método para desenhar tangentes

Livro XVIII - sobre integração; integrais binómios, integração das funções racionais

Livro XVIIII - estuda a resolução de equações diferenciais

Livro XX - diz respeito às equações às diferenças finitas; séries recorrentes

Livro XXI - estuda questões do cálculo das variações e problemas com os quais pretende incentivar os alunos a aplicar os teoremas dados para descobrir novos resultados.

O conteúdo dos *Principios Mathematicos* é abrangente, incluindo temas de aritmética, álgebra, geometria, trigonometria plana e esférica, cálculo diferencial e integral, cálculo das variações, equações diferenciais, problemas. A exposição dos assuntos é sistemática, rigorosa, concisa, sem qualquer referência a fontes. O método utilizado é o método sintético, característico do formalismo euclidiano, em que as proposições são enunciadas e demonstradas, não deixando vestígios da sua descoberta. O encadeamento lógico utilizado em cada capítulo é correcto, apresentando sucessivamente definições, postulados, axiomas, proposições (com os seus corolários). Além disso, inclui ainda advertências, suposições, praxes (prática, experiência) e *scholios* (comentários explicativos).

A obra *Principios Mathematicos* não teve, na época, o impacto que seria de esperar, e a sua divulgação ficou a dever-se à publicação (passados mais de 20 anos!), em Bordéus, em 1811, da tradução francesa de João Manoel de Abreu, com o título *Principes Mathématiques de feu Joseph-Anastase da Cunha*, traduits littéralement du portugais par J.M.d'Abreu. Esta obra foi reeditada em Paris, em 1816. Embora fosse intenção de João Manoel de Abreu incluir, numa 2^a edição, um Suplemento ao Prólogo, a verdade é que ele, entretanto, faleceu e a reedição desta obra não incluiu o Suplemento nem, tão pouco, o Prólogo.
Em 1987 a Universidade de Coimbra promoveu edições fac-simile das versões portuguesa e francesa dos *Principios Mathematicos*.

A primeira recensão crítica deste trabalho de José Anastácio da Cunha foi publicada no "Moniteur Universel", de 8 de Agosto de 1811, e é da autoria de Anastácio Joaquim Rodrigues, seu amigo e discípulo. Anastácio Joaquim Rodrigues explica a sequência adoptada na composição da obra e refere os conteúdos de cada livro, pronunciando-se sobre eles de um modo muito elogioso, como logo no início se denota: "Cet ouvrage profond est basé sur un plan uniforme, se distingue particulièrement par une grande concision, par la rigueur des démonstrations et par beaucoup d'originalité". Chamamos especialmente a atenção para os elogios que lhe merecem os livros XV e XVIII.

No mesmo ano de 1811, aparece nos *Göttingische gelehrte Anzeigen*[30], de 14 de Novembro, uma recensão negativa, criticando sobretudo as definições de exponencial e logarítmica dadas no Livro IX. Sabemos hoje[31] que, precisamente essas definições foram elogiadas e consideradas inovadoras, por Karl Frederic Gauss, numa carta a Bessel, com data de 21 de Novembro de 1811. Infelizmente esta carta só foi publicada setenta anos mais tarde.

Em Novembro de 1812, John Playfair escreve, na *Edinburgh Review* uma recensão da edição francesa dos *Princípios*[32], onde começa por dizer que "é o primeiro trabalho científico que lhe chegou de Portugal" e que se trata de um "tratado elementar sobre diversos ramos da Matemática, desde os Axiomas da Geometria até aos Problemas sobre Cálculo Integral". Em diversas passagens o autor refere-se à obra de modo muito elogioso, chegando mesmo a considerar que, no seu todo, tem um grande mérito, embora noutras teça comentários menos favoráveis. Em seu entender, a obra de José Anastácio da Cunha é comparável com a do Abbé de La Caille mas, mesmo admitindo que a do matemático português é mais original e concisa, acaba por colocá-la em segundo lugar na comparação com a de La Caille.

Esta opinião de Playfair seria, pouco depois, contestada, na mesma revista, por Anastácio Joaquim Rodrigues, *no artigo "Reflexões em Defesa dos Principios Mathematicos do dr.José Anastácio da Cunha censurados na Revista de Edinburgo de Novembro de 1812"*, publicado em 1813 e por João Manoel de Abreu, em *Notas de João Manoel de Abreu sobre varios lugares da censura dos Redactores do Edinburgh Review aos Principios Mathematicos de Joze Anastacio da Cunha, para servirem de Supplemento ao Prologo da segunda ediçaõ dos mesmos Principios*, in "O Investigador Portuguez em Inglaterra".

---

[30]A autoria desta recensão é atribuída a Joahann Tobias Mayer como pode ler-se em *Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta. Actas do Colóquio Internacional*, Lisboa, 1990.

[31]Ver o artigo de A. P. Youschkevitch "C. F. Gauss et J. A. da Cunha", em *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. 31, 1978, pp. 327-332.

[32]Esta recensão foi publicada em *O Investigador Portuguez em Inglaterra*, n^o 20, 1813, e foi a ela que recorremos para a elaboração desta parte do trabalho.

Garção Stockler no seu *Ensaio Histórico sobre a Origem e Progressos das Mathemáticas em Portugal* refere-se aos *Principios Mathematicos*, dizendo: "Este livro, aonde brilha a mais admirável concisão, aonde ha sem duvida uma disposição inteiramente nova na distribuição das doutrinas e sua deducção, e aonde se notam mesmo algumas ideas originaes, tem sido o objecto da admiração e louvor exagerado de alguns e da censura acerba, e da desapprovação de outros" [33]

Em 1865, no artigo "Estudos sobre a proporcionalidade especialmente sobre a Definição V do Livro V de Euclides", António José Teixeira analisa com cuidado especial o livro III dos *Principios*, em que este assunto é tratado.

Gomes Teixeira, no "Elogio Histórico do Doutor José Anastácio da Cunha" [34], tece considerações de carácter geral, sobre o método de exposição usado nos *Principios*, sobre o modo como os capítulos estão organizados e analisa com cuidado a Geometria Elementar, comparando os capítulos dos *Principios* com os correspondentes dos *Elementos*. Aqui, aponta algumas simplificações e aperfeiçoamentos, mas também alguns defeitos, como, por exemplo, o sacrifício da clareza. Merece-lhe uma referência particular a Teoria sobre convergência das séries e a Teoria dos números irracionais, onde, como diz: "é nelas que melhor se revela a finura de espírito do autor ".

Vicente Gonçalves, em 1940, na "Análise do Livro VIIII dos *Principios Mathematicos* de José Anastácio da Cunha" [35], refere-se a várias passagens da obra, analisando em especial a definição correcta dada, no Livro VIIII, de série convergente e a forma como ela é usada.

Youschkevitch, em "J. A. Da Cunha et les fondements de l'analyse infinitesimal", publicado[36] em 1973, estuda cuidadosamente os Livros IX e XV dos *Principios* realçando o seu rigor e originalidade. E faz observações pertinentes sobre a definição de série convergente, que na versão francesa de 1811 (aquela que o autor leu) é, na verdade, circular, devido a uma tradução defeituosa de João Manoel de Abreu. Por outro lado, refere, também, um artigo[37] de Timtchénko, de 1899, em que este considera os *Principios Mathematicos* uma obra notável, que constitui a primeira tentativa de uma exposição estritamente formal da matemática, no seu conjunto.

[33] Página 167.

[34] Em *Panegíricos e Conferências*, 1925, p.121 a 153.

[35] Em "Congresso do Mundo Português", Lisboa, 1940. Vol.XII, pp. 123-140.

[36] Em *Revue d'Histoire des Sciences*, Tomo XXVI, n^o 1, Janeiro de 1973.

[37] Youschkevitch, "J.A.da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale", em *Revue d'Histoire des Sciences*, tomo XVI, n^o 1, p. 4.

No seu artigo "Os ≪Princípios Mathematicos≫ de José Anastácio da Cunha"[38], Jaime Carvalho da Silva e António Leal Duarte estudam especialmente os livros IX e XV, acompanhando esse estudo de muitas referências a trabalhos realizados por outros investigadores.

Enrico Giusti, em "Quelques réflexions sur les "Principios"de Da Cunha"[39], faz uma análise detalhada sobre a estrutura da obra, incluindo no seu artigo dois apêndices onde discrimina o assunto estudado em cada livro e estabelece a correspondência entre as proposições dos *Principios* e as dos *Elementos* de Euclides, na versão de Clavius.

José Francisco Rodrigues e Luis Saraiva, em "Apresentação: elementos para a contextualização da obra matemática de J. A. da Cunha e das polémicas que na sua época suscitou"[40], fazem uma avaliação global da obra de José Anastácio da Cunha, referindo-se, em particular aos *Principios Mathematicos*, que consideram a sua "obra maior". Estes investigadores, acentuam a afirmação de Youschkevitch que considera Anastácio da Cunha como "um dos principais precursores da reforma dos fundamentos do cálculo infinitesimal, iniciada nas primeiras décadas do século XIX". José Francisco Rodrigues debruça-se sobre a vida de José Anastácio da Cunha e a sua obra matemática no artigo *In Memoriam* do Professor João Santos Guerreiro intitulado "Cultura e Ciência em Portugal no Século das Luzes, a obra matemática de José Anastácio da Cunha"[41].

No artigo "Anastácio da Cunha and the concept of convergent series", publicado em 1988, nos *Archive for History of Exact Science*[42], Franco de Oliveira analisa com profundidade a definição de série convergente dada nos *Principios Mathematicos*.

Em "José Anastácio da Cunha: um Matemático a Recordar, 200 Anos Depois"[43], João Filipe Queiró privilegia o estudo dos livros IX e XV, explicando a discordância existente entre Vicente Gonçalves e Youschkevitch, a propósito da interpretação da definição de série convergente, baseada na leitura de diferentes

[38] *Actas do Colóquio Internacional, Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta.* Lisboa, Imprensa Nacional, 1990. pp. 81 a 95.
[39] Ob. Cit., pp. 33 a 52.
[40] Ob. Cit., pp. 309 a 315.
[41] Publicado em *Colóquio de Ciências*, n^o 1.
[42] No vol. 39, n^o 1.
[43] *Matemática Universitária,* n^o 14, 1992 (versão refundida do artigo "José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner", publicado em 1988 no *The Mathematical Intelligencer*, n^o 10.

exemplares dos *Principios* (na versão de 1811, João Manoel de Abreu traduz de forma incorrecta a definição de série convergente, como já dissemos).

3 O Livro X dos *Principios Mathematicos*

Embora conheçamos várias referências ao Livro X dos *Principios Mathematicos*, não sabemos de nenhum texto que faça uma análise completa deste livro.

Anastácio Joaquim Rodrigues, na recensão à 1^a edição francesa, diz: "O Livro X contém uma bela teoria da resolução de equações. Encontra-se neste último um método novo, simples, também infalível mais curto que o de M. Delacroix"[44].

Cremos que este M. Delacroix, que Anastácio Joaquim Rodrigues refere, é o matemático francês Sylvestre François Lacroix (1765-1843). Tivemos ocasião de ver a 9^a edição dos *Élémens d'Algèbre*, seguida de *Complément des Élémens d'Algèbre*, de S.F. Lacroix, publicada em Paris, em 1811. Não fizemos um estudo comparativo dos textos de Lacroix e José Anastácio da Cunha, mas pudemos ver que a parte referida do texto de José Anastácio da Cunha, no estilo conciso que lhe é próprio, é, de facto, mais curta que a correspondente de Lacroix. Devemos, porém, acrescentar que o texto de Lacroix contém mais itens do que o de José Anastácio da Cunha.

Playfair[45] refere-se ao Livro X de modo elogioso, dizendo: "O décimo livro trata das raizes das equações de que *o author dá huma idea mui distincta, e exacta, livre de muitas difficuldades, que se encontrão nesta parte da Algebra"*; mas acrescenta que não trata na íntegra a dificuldade a respeito das raízes imaginárias, deixando um paradoxo por resolver.

Anastácio Joaquim Rodrigues, no artigo "Reflexoens em defeza dos Principios mathematicos do Dr. José Anastácio da Cunha censurada no Revisor de Edinburgo, em Novembro de 1812"[46] responde a Playfair com as palavras do próprio Anastácio Cunha, no Livro X dos *Principios Mathematicos*[47]: "(...) Os Mathematicos modernos quando encontram semelhantes expressoes [raízes quadradas de números negativos], nem por isso deixam de continuar o cálculo: e mostra

[44] "Moniteur Universel, 8 de Agosto de 1811", in *Actas do Colóquio Internacional, Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta.* Lisboa, Imprensa Nacional, 1990, p. 401.

[45] "Edinburgh Review", 1812, in *O Investigador Portuguez em Inglaterra*, vol V, nº 20, 1813, p. 544.

[46] *O Investigador Portuguez em Inglaterra*, Vol VIII, nº 25, 1813.

[47] *Principios Mathematicos*, p. 125.

a experiência que este sahe certo com tanto que se observem certas cautelas. Huma consiste em fazer sempre $(\sqrt{-m})(\sqrt{-n}) = -\sqrt{mn}$; outras em sujeitar a interpretação destas expressoes metaphoricas do cálculo moderno ás condiçoens dos problemas e recta razão".

No mesmo jornal, João Manoel de Abreu vem, também, em defesa do mestre. Entre outros argumentos, diz que não entende o que Playfair chama "paradoxo"sobre as raízes imaginárias "Porque a theoria do Livro 10 hé rigoroza; e nenhuma theoria rigoroza deve dar lugar a paradoxos, senão sophisticos"[48]

Gomes Teixeira refere-se ao Livro X de forma global, em dois momentos:

a) Nos *Panegíricos e Conferências*, 1925, onde diz: "menos elogios merecem as passagens da obra consagradas à teoria das equações que é desordenadamente exposta; assinalarei todavia um método novo para a determinação das raízes inteiras das equações algébricas e outros para a determinação da maior e menor raiz negativa, quando se sabe antecipadamente que tais raízes existem.(1)". Este (1), no fim da citação, remete para uma nota de rodapé, onde se lê: "Quando Anastácio da Cunha escreveu os seus Princípios tinham já aparecido as memórias célebres de Lagrange sobre a resolução das equações numéricas, mas parece que o nosso matemático só tarde as conheceu, pois que, tendo consagrado o Livro X à resolução das equações numéricas, só no Livro XVIII apresentou o método daquele geómetra para a separação das raízes."[49]

b) Na *História das Matemáticas em Portugal*, 1934, onde se lê: "menos elogios merecem as passagens da obra consagradas à teoria geral das equações, que é pobre e desordenadamente exposta"[50]

Sabemos hoje, a partir do manuscrito recentemente encontrado, que José Anastácio da Cunha leu, de facto, as *Memórias* de Lagrange e que faz uso explícito delas no Livro XVIII, para a separação das raízes das equações[51]. Além disso, cremos que já também a elas recorre, implicitamente, no Livro X.

Curioso é notar que, sobre a referida separação das raízes das equações, já no Livro XVII, José Anastácio da Cunha afirma num dos comentários: "A experiência tem mostrado aos Geómetras que toda a variável, entre cujos valores há diferenças infinitésimas, ao passar de (+) para (-), se acha igual a 0 ou a $\frac{1}{0}$".

[48] *O Investigador Portuguez em Inglaterra*, Vol VIII, nº 30, 1813, pp. 449.

[49] *Panegíricos e Conferências*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1925, p. 141.

[50] *História das Matemáticas em Portugal*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1934, p.258.

[51] H. Bosmans, no artigo "Sur le ≪Libro de Algebra≫ de Pedro Nuñez"(em *Bibliotheca Mathematica*, 3ª série, 8º volume, 1907-1908, pp. 166-167) afirma que este método de separação das raízes aparece pela primeira vez no *Apêndice Algébrico* de Simon Stevin à sua *Arithmétique*, o que tivemos oportunidade de confirmar.

Sobre esta "experiência", que José Anastácio da Cunha invoca, João Filipe Queiró[52] diz parecer-lhe "muito razoável que, sem uma construção dos números reais e uma noção de continuidade se invoque a "experiência"para justificar este tipo de afirmação".

As avaliações de Gomes Teixeira sobre o Livro X não nos parecem, na sua totalidade, justificáveis, como vamos ver.

O Livro X está, tal como os outros, estruturado logicamente e nele observa-se uma composição análoga: Não tem título; começa pelas definições (apenas duas): de número inteiro e de raízes de um trinómio, quadrinómio, etc... (implica a decomposição de polinómios em factores); Seguem-se as proposições, ordenadas logicamente, numa sequência euclidiana, que à primeira vista pode parecer não facilitar a leitura sequencial do Livro, mas que, examinada com mais atenção, a ilumina e clarifica.

Vejamos que assim é, considerando o conteúdo das proposições, em termos actuais.

I - Se a é raiz de $P(x)$ então $P(a) = 0$.

II - Num polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros que tenha uma raiz inteira, a, então $P(x) = (x - a)Q(x)$. Daqui pode concluir-se que, para um valor inteiro, β, de x, é: $P(\beta) = (\beta - a)Q(\beta)$ e então $Q(\beta) \mid P(\beta)$.

III - Determinação dos submúltiplos de um número inteiro dado.

IIII - Determinação das raízes inteiras de um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, caso existam.

José Anastácio da Cunha dá a seguinte regra. Escrevam-se numa coluna os números 1, 0 e -1; à frente de cada um deles escreva-se, respectivamente, o valor de $P(1)$, $P(0)$ e $P(-1)$ e os submúltiplos destes números. Se entre estes submúltiplos houver três números consecutivos, um deles defronte de 1, outro defronte de 0 e o outro defronte de -1, tente-se se o médio é raiz, escrevendo-o positivamente se tiver mais unidades que o superior e negativamente se tiver menos.

Por exemplo, seja $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15$, o polinómio do qual se quer determinar as raízes inteiras.

[52] "José Anastácio da Cunha: Um Matemático a Recordar, 200 Anos Depois"em *Matemática Universitária*, nº 14, 1992, pp 5-27, p. 21 (Versão refundida do artigo "*José Anastácio da Cunha: a forgotten forerunner*", publicado em *Mathematical Intelligencer*, Vol. 10 (1998), pp. 38-43).

Tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 1 & 10. \quad 1. \quad \mathbf{2}. \quad 5 \\ 0 & 15. \quad 1. \quad \mathbf{3}. \quad 5 \\ -1 & 68. \quad 1. \quad 2. \quad \mathbf{4}. \quad 17. \quad 34 \end{array}$$

Como 2, 3 e 4 são consecutivos, "tente-se se 3 é raiz". Verifica-se que sim.

Mesma questão para o polinómio $x^3 + 2x^2 - 33x + 14$.

Tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 1 & -16. \quad \underline{1}. \quad 2. \quad 4. \quad \mathbf{8} \\ 0 & 14. \quad 1. \quad \underline{2}. \quad \mathbf{7} \\ -1 & 48. \quad 1. \quad 2. \quad \underline{3}. \quad 4. \quad \mathbf{6}. \quad 8. \quad 12. \quad 24 \end{array}$$

Como 1, 2, 3 são consecutivos, "tente-se se 2 é raiz"; Verifica-se que 2 não é raiz. Mas, como, 8, 7, 6 também são consecutivos, "tente-se se -7 é raiz"; Verifica-se que sim.

José Anastácio justifica estas regras, dizendo apenas: "As proposições I e II deste livro X ensinam esta praxe".

De facto, substituindo sucessivamente x por 1, 0 e -1, em

$$P(x) = (x - a)Q(x),$$

vem:

$$\begin{aligned} &P(1) = (1 - a)Q(1) = -(a - 1)Q(1) \\ &P(0) = -aQ(0) \\ &P(-1) = (-1 - a)Q(-1) = -(a + 1)Q(-1). \end{aligned}$$

Vemos que:

$$\begin{gathered} (a - 1) \mid P(1) \\ a \mid P(0) \\ (a + 1) \mid P(-1) \end{gathered}$$

Assim, para a inteiro, os módulos dos números $(a - 1)$, a e $(a + 1)$ aparecem em progressão aritmética, que é crescente se $a > 0$, e é decrescente se $a < 0$. Destas considerações resulta justificada a regra usada por José Anastácio. Não sabemos se é a este método que Gomes Teixeira se refere quando escreve "método novo para a determinação das raízes das equações algébricas". Notemos que este método já antes fora dado por Newton[53].

V - Apresentação das raízes de um polinómio do 2º grau, com a correspondente fórmula resolvente e a referência aos imaginários, já antes citada. Observamos que ela vigorou em textos portugueses até Gomes Teixeira.

[53] *Universal Arithmetick*, London, 1720, p. 39.

VI - Indicação das raízes de um polinómio do 3º grau, do tipo $x^3 + bx + c$ pela aplicação da fórmula de Cardano-Tartaglia[54], com comentários adequados relativos a casos particulares da equação cúbica.

VII - Indicação das raízes do polinómio completo de 3º grau: x^3+ax^2+bx+c, pela redução ao caso anterior, por uma mudança de variável.

VIII - Indicação das raízes do polinómio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, obtidas a partir da resolvente do 3º grau dada por Ferrari e incluída por Cardano na *Ars Magna*.

VIIII - Determinação das raízes de $P(-x) = 0$, a partir das raízes de $P(x) = 0$.

X - Demonstração de que um polinómio do tipo $P(x) = 0$, com coeficientes todos positivos não pode ter uma raiz positiva.

Trata-se de uma demonstração por redução ao absurdo que, pela sua curiosidade e facilidade, apresentamos.

Represente $x^4+(a-\alpha)x^3+(b-a\alpha)x^2+(c-b\alpha)x-c\alpha[= (x-\alpha)(x^3+ax^2+bx+c)]$ um polinómio que tem a raiz positiva, α. Para que $(a - \alpha)$, $(b - a\alpha)$, $(c - b\alpha)$ sejam positivos, é necessário que $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$. Mas para que $-c\alpha > 0$ tem de ser $c < 0$, o que é absurdo, pois contradiz a conclusão anterior.

José Anastácio da Cunha dá a prova para um polinómio de grau 4, mas a conclusão que tira é geral.

XI - Determinação do limite superior das raízes reais de um polinómio (se existirem). O enunciado que José Anastácio da Cunha apresenta, em linguagem retórica, corresponde a um teorema de Newton, incluído na *Universal Arithmetick*[55] e que, em linguagem actual diz o seguinte: dado um polinómio $P(x)$, de grau n, em que o coeficiente do termo de mais alto grau é positivo, se existir um número positivo, M, que torne positivos o polinómio $P(x)$ e todos os seus derivados até à ordem n, então M é um majorante das raízes reais de $P(x)$.

José Anastácio apresenta, também, um corolário relativo ao caso de existência de raízes iguais. A justificação é dada de uma maneira curiosa que corresponde exactamente ao enunciado actual: se um polinómio $P(x)$ tem uma raiz dupla, a, então a é, também, raiz de $P'(x)$.

[54] Anastácio da Cunha volta a referir-se a este assunto, no Livro XXI, proposição VI, como tema de investigação.

[55] *Universal Arithmetick*, London, 1720, p. 208.

XII - Indicação de vários exemplos de determinação dos valores aproximados das raízes dos polinómios, com o cuidado de observar que os métodos preconizados só têm interesse se essas raízes existirem. Recorde-se que, na época, este tema era considerado de grande importância e era apresentado em praticamente todos os textos relativos à resolução de equações. Anastácio da Cunha dá um comentário, muito elucidativo e claro, sobre a forma de levar a aproximação tão longe quanto se queira e, simultaneamente, verificar se a raiz existe.

Dos vários métodos incluídos neste item, só nos vamos referir a um deles, que é conhecido por "Método de Newton", ou "Método de Newton - Raphson"[56], que continua a ser um método ainda largamente utilizado hoje em dia, para obter valores aproximados de raízes de equações. José Anastácio apresenta-o no *Scholio*, da forma que vamos dar, abreviadamente.

Considere-se a equação $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&$. Partindo de r como um primeiro valor aproximado da raiz, para obter uma melhor aproximação, substitui-se na equação, x por $r + z$, obtendo $A + Br + Cr^2 + Dr^3 + \& + (B + 2Cr + 3Dr^2 + \&)z + \& = 0$. Por z ser suficientemente pequeno, desprezam-se os termos em z, de grau superior ao primeiro, obtendo-se: $z = \frac{-A-Br-Cr^2-Dr^3-\&}{B+2Cr+3Dr^2+\&}$. Donde, a raiz da equação será $x = r - \frac{A+Br+Cr^2+Dr^3+\&}{B+2Cr+3Dr^2+\&}$.

Observe-se que este método de aproximação das raízes se pode exprimir pela fórmula $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, onde x_k e x_{k+1} são valores aproximados da raiz de $f(x) = 0$[57]. José Anastácio da Cunha dá uma regra prática para determinar o número de algarismos significativos correctos na divisão, o que corresponde ao que actualmente se exprime dizendo que a razão de convergência do método de Newton é dois (convergência quadrática)[58].

XIII - Determinação das raízes de um polinómio geral, do 4º grau, do tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, em que o coeficiente do termo de maior grau é diferente de 1, por redução aos casos anteriormente tratados.

XIIII - Determinação da mínima raiz positiva de uma equação polinomial, à

[56] Herman Goldstine na sua obra *A history of Numerical Analysis from the 16th through the 19th century*, (Springer, 1977) diz que este método remonta a Viète e Oughtred, e que a versão de Newton foi aperfeiçoada por Raphson em *Analysis Equationum Universalis*, 1690. Também Jean-Luc Chabert ed al., em *Histoire d'algorithmes*, (Belin, Paris, 1994) dão referências pormenorizadas, acentuando o carácter algorítmico que Raphson lhe deu. Newton incluíu-o numa obra escrita em latim, traduzida em inglês em 1736, e em francês em 1740, com o título *La Méthode des Fluxions et des Suites Infinies*.

[57] Agradecemos ao Prof. Rui Ralha a ajuda que nos prestou na identificação deste método.

[58] Valença, Maria Raquel, *Métodos Numéricos*, Livraria Minho, Braga, 1993, p.47.

custa da maior raiz positiva da equação que se obtém pela transformação $x = \frac{1}{z}$.

XV - Determinação das raízes iguais de um polinómio, se tais raízes existirem. Aqui o autor aplica o Corolário relativo à Proposição XI, já antes referido, e apresenta casos em que existem raízes iguais e outros em que tais raízes não existem.

O mesmo processo que José Anastácio da Cunha utiliza para determinar as raízes comuns a $P(x)$ e a $P'(x)$, permite-lhe a simplificação de fracções, pela determinação das raízes comuns ao numerador e ao denominador, como é exemplificado no Corolário 1, desta proposição. Por outro lado, um procedimento análogo é aplicado para a "exterminação"(isto é, eliminação) de incógnitas, num sistema de equações, como é descrito no Corolário 2.

Como conclusão, pensamos que, no Livro X falta uma referência explícita ao método de separação de raízes reais e o enunciado da regra dos sinais. Parece-nos no entanto que José Anastácio da Cunha os aplica várias vezes, como dissemos. Finalmente, podemos afirmar que, em relação às raízes reais das equações, desde que existam, estão bem caracterizados os métodos para as determinar e para as aproximar com um grau de maior ou menor precisão, como se desejar.

4 O Manuscrito: Nouvelle Resolution Numerique des Équations de tous les Degrés

Em "Escritos posthumos de José Anastácio da Cunha ordenados relativamente ao systema dos seus Principios Mathematicos e offerecidos a S. A. R. o S. D. João VI Principe regente de Portugal"[59], João Manoel d'Abreu dirige-se a D. João VI pedindo protecção real para a publicação dos *Escriptos Posthumos* de Anastácio da Cunha, pois considera que estes documentos "facilitarão o exame e segurão [seguram, sustentam] talvez a arriscada classificação dos ditos Principios Mathematicos"[60]. Estes *Escriptos Posthumos* teriam chegado à corte de D. João VI através de Pina Manique, depois de devidamente ordenados por João Manoel d'Abreu, de acordo com o seguinte índice:

"Opusculos - Notice sur la vie de J.A.da Cunha.

Noticia sobre J.A. da Cunha vertida em portuguez pelo editor.

[59]Supomos que esta carta terá sido escrita depois de 1811, data da 1ª edição francesa dos *Principios Mathematicos*, e antes de 1815, ano da morte de João Manoel d' Abreu.

[60]Em *Actas do Colóquio Internacional, Anastácio da Cunha, o matemático e o poeta.* Lisboa, Imprensa Nacional, 1990, pp. 353 a 355.

I - Prologo sobre huns Principios de Geometria tirados dos de Euclides.
Refere-se aos primeiros livros dos Principios Mathematicos do Autor

II - Extracto de uma carta a hum discipulo da ... que tinha sido alunno do R.Collegio de S. Jorge
Refere-se ao L. VIII dos dos Principios

III - Extract from an original MS ...
Traducção do opusculo precedente pelo editor ...
Refere-se ao L. X

IV - Nouvelle resolution numerique des équations de tous les dégrées.
Tradução do opúsculo precedente pelo editor ... Refere-se ao L. X.

V- Sobre o infinito ...

VI - Contra a doutrina das razoens primeiras e ultimas das quantidades nascentes e fenescentes...

VII - Prologo sobre os Principios do Calculo fluxionario
Os três opusculos precedentes referem-se ao L. XV.

VIII - Reducçoens de humas integraes binómias a outras ...
Refere-se ao L. XVIII.

IX - Extracto doutro MS ...
Refere-se ao L. XVIII.

X - Examen de quelques passages des premier et troisième memoires de M. de La Grange sur les Cordes Sonore [Sic]
Traducção do opúsculo precedente pelo editor.
Refere-se ao L. XXI

XI - Solution du problème des isoperimètres ...
Traducção do opúsculo precedente pelo editor.

XII - Extracto de dous MS sobre o tetragonismo approximado de M. Fontaine.

XIII - Ensaio sobre os principios de Mechanica, obra posthuma "José Anastácio da Cunha dada a luz por D.D.A. de S.C."Lond. 1807...

XIV - La balistique de Galilée...

Traducção do op. prec. pelo ed ...

XV - Extracto de hum parecer do A sobre certa memoria Coroada pela ..."

Sabemos que há ainda outro manuscrito, intitulado "Logarithms & powers", que não consta desta lista, mas está referido no prólogo da edição francesa de 1811 e nas *Composições Poéticas do Doctor Joseph Anastasio da Cunha, Lisboa, 1839.* Na mesma lista não figura o Ensaio sobre as Minas, de que já falámos na parte I deste trabalho.

Em Fevereiro de 2005, quando pesquisava no Arquivo Distrital de Braga, Maria do Céu Silva[61], começou por encontrar um primeiro conjunto destes opúsculos, nomeadamente: "Nouvelle Résolution Numérique des Équations de tous les Dégrées", "La Balistique de Galilée"e "Logarithms & Powers". No mês seguinte, Maria do Céu Silva voltou a encontrar outro conjunto de manuscritos, constantes da lista de João Manoel d'Abreu, desta vez composto por: "Principios do Cálculo Fluxionario", "Extracto de hum parecer do A sobre certa memoria Coroada pela ..., que começa com as palavras "Meu Rico Amigo"e um outro manuscrito, datado de "Necessidades March 3. 1780", que é "Copy of a paper given to Father Almeida on his desiring of me a problem of Mathematics for his Academy to propose to ALL THE LEARNED WORLD!!". Todos estes manuscritos são provenientes do espólio do Arquivo do Conde da Barca, António de Araújo de Azevedo (1754-1817).

No presente trabalho só nos vamos ocupar duma breve análise do manuscrito "Nouvelle Résolution Numérique des Equations de Tous les Degrés".

Este manuscrito, escrito em francês, é encimado por um subtítulo, escrito em latim, onde se lê: *Facile est inventis addere*, que significa, *Fácil é acrescentar ao que já está inventado.*

José Anastácio da Cunha começa por observar que todos os geómetras procuraram, durante séculos, obter uma resolução numérica das equações de todos os graus, mas que foi Lagrange o autor desta descoberta. Sobre o método utilizado por Lagrange, José Anastácio da Cunha faz muitas considerações interessantes, que aqui não referiremos[62], mas conclui que o método do matemático francês

[61]Esta pesquisa processou-se no âmbito do trabalho de investigação, preparatório da sua tese de doutoramento, enquanto membro do Centro de Matemática da Universidade do Porto (CMUP).

[62]Este manuscrito está a ser estudado por um grupo de trabalho composto por: João Filipe Queiró (UC), António José Machiavelo (UP), Maria Fernanda Estrada (CMAT) e Maria do Céu

envolve cálculos penosos, que agradam pouco aos calculadores.

Por isso se propõe apresentar um outro método "não só geral e rigoroso, mas de uma execução tão expedita e facilitada que frequentemente torna inúteis os melhores métodos que tenhamos, os de Sir Isaac Newton para as raízes racionais e os de Van Hudde para as raízes iguais."

José Anastácio da Cunha reconhece que o método que vai propor não é mais do que uma aplicação de um dos teoremas de Newton, contidos na sua *Arithmétique universelle*."

Eis o teorema que José Anastácio da Cunha enuncia, utilizando uma linguagem simbólica:

Seja $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + etc. = 0$ a (equação) Proposta. Escreva:

$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + etc.$

$nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + (n-3)cx^{n-4} + etc.$

$(n-1)nx^{n-2} + (n-2)(n-1)ax^{n-3} + (n-3)(n-2)bx^{n-4} + (n-4)(n-3)cx^{n-5} + etc.$

$(n-2)(n-1)nx^{n-3} + (n-3)(n-2)(n-1)ax^{n-4} + (n-4)(n-3)(n-2)bx^{n-5} + etc.$, e assim sucessivamente, até que encontre um polinómio cujo único termo negativo seja o último. A Proposta não terá raiz positiva que não seja mais pequena que o número positivo que, colocado no lugar de x, torne todos estes polinómios positivos.

Este teorema de Newton é o mesmo que já referimos no livro X, proposição XI, e que, como observámos, dá um limite superior das raízes reais, se elas existirem. No entanto, notamos que, enquanto no livro X o teorema é apresentado numa forma retórica, aqui é dado em linguagem simbólica, praticamente actual.

Na sua *Arithmétique universelle*, Newton não o demonstra mas José Anastácio da Cunha afirma que "autores conhecidos"o demonstraram e ele mesmo apresenta uma demonstração no Livro X, prop. XI. É neste teorema que José Anastácio da Cunha se baseia para determinar "duma maneira infalível"os valores exactos ou aproximados de todas as raízes [reais] das equações de todos os graus.

Na aplicação a dois exemplos, Anastácio da Cunha socorre-se, também, de "regras conhecidas"sobre as equações algébricas, que não menciona, mas que julgamos serem as seguintes:

(a) Uma equação (polinomial) de grau ímpar tem sempre uma raiz real (apresentado por Newton na *Arithmétique universelle*)

Silva (CMUP), do qual dois elementos estão a trabalhar sobre as partes relativas a Lagrange e D'Alembert. Aqui só nos ocuparemos da parte manuscrita relativa a Newton.

(b) Regra dos sinais de Descartes (também incluída na *Arithmétique universelle*) baseada na mudança de sinal dos coeficientes. Em termos actuais, esta regra pode enunciar-se do seguinte modo: Numa equação de coeficientes reais, o número de raízes positivas e o número de variações são da mesma paridade e o número de raízes positivas não pode exceder o número de variações.

(c) Se os coeficientes de uma equação do tipo $P(x)$ são todos positivos, então a equação não tem raiz positiva (Livro X, prop. X).

(d) Se a é raiz de $P(x) = 0$, então $-a$ é raiz de $P(-x) = 0$ (Livro X, prop. IX).

Vejamos o primeiro dos exemplos dados por José Anastácio da Cunha.

Seja a Proposta, $x^3 - 702x^2 + 160600x - 16080000 = 0$, da qual se pretende determinar o valor exacto, ou aproximado das raízes positivas.

José Anastácio da Cunha invoca as regras conhecidas para afirmar que esta equação deve ter uma raiz positiva. (Pela aplicação da regra dos sinais de Descartes?). Depois, conforme o teorema de Newton acima referido, escreve o polinómio e as suas derivadas até à ordem 1. Obtém, sucessivamente:

$x^3 - 702x^2 + 160600x - 16080000$;
$3x^2 - 1404x + 160600$;
$6x - 1404$;
que escreve, ainda, numa forma que considera "mais conveniente", a saber:
$((x - 702)x + 160600)x - 16080000$
$(3x - 1404)x + 160600$
$x - 234$.

Seguidamente, tece as seguintes considerações:

O binómio mostra que, para tornar todos estes polinómios positivos, x deve ser maior do que 200; O trinómio mostra que 300 não bastariam, nem mesmo 400; mas que tudo se torna positivo pondo 500 no lugar de x. Portanto, diz José Anastácio da Cunha, a raiz procurada é menor que 500 (pelo teorema) e não pode ser menor que 400 (pelo mesmo teorema); e vemos que ela não é igual a 400; Logo, o primeiro algarismo da raiz procurada é 4 faltando centenas (isto é, trata-se de 4 centenas + ...).

Quando José Anastácio da Cunha afirma que, "pelo mesmo teorema"a raiz não pode ser 400 nem menor do que 400, supomos que ele não está a pensar erradamente que o aludido Teorema de Newton dá uma condição necessária e suficiente, mas que, simplesmente, tirou essas conclusões a partir do cálculo do valor do polinómio para $x = 400$.

Para encontrar o algarismo seguinte da raiz procurada, faz a substituição $x = z+400$ na equação dada, obtendo a equação $z^3+498z^2+79000z-160000 = 0$, da qual 2 é raiz. Assim, a raiz da equação proposta é $x = 402$.

Este primeiro exemplo é muito simples e conduz, imediatamente, a uma solução inteira da raiz, mas é esclarecedor quanto ao *modus operandi*.

José Anastácio da Cunha propõe, depois, um segundo exemplo que vai exigir cálculos mais longos. É esse exemplo que vamos tratar a seguir.

Seja a Proposta $x^3 - 300x + 1000 = 0$. "Na incerteza"da existência de uma raiz positiva do polinómio $P(x) = x^3 - 300x + 1000$, Anastácio da Cunha procura a raiz negativa. Para tal, determina a raiz positiva de $P(-x)$, o que equivale a resolver a equação $x^3 - 300x - 1000 = 0$. Por cálculos análogos aos do exemplo anterior e, agora, sem qualquer justificação, conclui que a raiz tem de ser maior do que 10, mas menor do que 20.

Fazendo na equação anterior, $x = z + 10$, obtém $z^3 + 30z^2 - 3000 = 0$; e, por aplicação do método anterior, conclui que a raiz desta equação está compreendida entre 8 e 9, o que ele traduz escrevendo $z = 8, etc.$. Por isso, a raiz da equação $x^3 - 300x - 1000 = 0$ está entre 18 e 19.

Fazendo, desta vez, a substituição $x = z + 18$ na referida equação, obtém uma equação do terceiro grau em z, que escreve na forma $((z+54)z+672)z-568 = 0$. Para esta equação obtém a raiz $z = 0,7etc.$, o que leva a fazer na proposta a substituição $x = z + 18,7$. Obtém, então, a equação $((z + 74,8)z + 749,07)z - 70,797 = 0$, para a qual encontra a raiz $z = 0,09etc.$, concluindo que a raiz da equação $x^3 - 300x - 1000 = 0$ é $x = 18.79etc.$. Deste modo, como ele conclui, $x = -18,79etc.$ é raiz da equação dada.

Algumas considerações sobre o manuscrito

O conteúdo do manuscrito leva-nos a conjecturar que teria sido escrito num tempo posterior ao da composição do Livro X. Alguns detalhes são, a nosso ver, particularmente relevantes. Citamos, em primeiro lugar, a forma como, sobre o mesmo assunto, José Anastácio da Cunha se exprime no Livro X e no manuscrito. De facto, no manuscrito traduz em linguagem simbólica partes que nos *Principios Mathematicos* estão na linguagem retórica. Por outro lado, observamos que é muito mais conciso no manuscrito do que no livro X (onde já há grande concisão!), parecendo estar a querer dirigir-se a um público conhecedor de certos princípios básicos. Senão, vejamos: enquanto no Livro X apresenta uma demonstração do teorema de Newton, relativamente ao limite superior das raízes reais de uma equação algébrica, no manuscrito limita-se a afirmar que "Des auteurs connus ont démontré ce théorème"; e nós sabemos que ele próprio está incluído nesses autores, pois o demonstra no Livro X. Acrescentamos, ainda, que todos os exemplos do manuscrito são originais, enquanto que no Livro X há pelo menos um exemplo tirado directamente da *Universal Arithmetick*, de Newton, já referida. Por fim, o facto de o manuscrito estar escrito em francês, leva-nos a admitir a hipótese de se destinar a uma posterior publicação europeia.

O manuscrito agora encontrado é particularmente relevante no que diz respeito às fontes utilizadas por José Anastácio da Cunha para a escrita dos *Principios*, até agora apenas conjecturadas. Algumas dessas fontes são claramente indicadas, como: a *Aritmética Universal* de Newton [*Universal Arithmetic*, 2 vol, Amesterdão, 1761]; "duas longas e sábias memórias"apresentadas por Lagrange à Academia Real das Ciências de Berlim, em 1769 e 1770; o método de Van Hudde [1628-1704], para a determinação de raízes iguais [que, segundo Cajori, consta numa memória sobre a resolução das equações, datada de 1659]; o estudo de D'Alembert, sobre as raízes imaginárias.

Esta indicação pormenorizada das fontes utilizadas parece-nos mais um argumento a favor da nossa dupla conjectura respeitante à data – posterior ao Livro X – e à intenção do autor – uma divulgação a nível europeu.

Só lamentamos que não se tenha concretizado este objectivo no seu tempo.

Uma extensão da representação de Munn e o grau de separação dos idempotentes de um block-group

Vítor Hugo Fernandes[a]

[a]Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2829-516 Monte da Caparica, Portugal; e-mail: vhf@fct.unl.pt

Resumo

É bem conhecido que todo o semigrupo [finito] pode ser fielmente representado por transformações parciais ou totais sobre um conjunto [finito] apropriado. Assim, dado um semigrupo finito S, podemos considerar naturalmente o problema de determinar o menor inteiro não negativo n tal que S pode ser mergulhado no monóide $\mathcal{PT}_n$ de todas as transformações parciais de um conjunto com n elementos. Esta questão deriva de um problema colocado por B. Schein em 1972 [12] e foi resolvida por D. Easdown em 1987 [2] para semigrupos finitos inversos fundamentais. Neste trabalho apresentamos o estudo do problema análogo ao descrito atrás considerando representações que separam os idempotentes em vez de representações fiéis. Para um *block-group* (finito) S, exibimos uma descrição do menor inteiro não negativo n tal que existe um homomorfismo que separa idempotentes de S em $\mathcal{PT}_n$. Uma vez que, para um semigrupo fundamental S, este número coincide com o menor inteiro não negativo n tal que S pode ser mergulhado no monóide $\mathcal{PT}_n$, o nosso resultado generaliza o de Easdown mencionado. Embora independente, o nosso método tem, sem dúvida, fortes conexões com as ideias originais de Easdown. Assim, em primeiro lugar construímos uma extensão para *block-groups* da representação de Munn e, de seguida, obtemos um refinamento desta que provamos ser minimal. Ainda, como aplicação da nossa extensão da representação de Munn, mostramos as igualdades $\mathsf{BG} = \mathsf{EI} ⓜ \mathsf{Ecom} = \mathsf{N} ⓜ \mathsf{Ecom}$, em que BG, EI, N e Ecom denotam respectivamente as pseudovariedades dos block-groups finitos, dos semigrupos finitos com um só idempotente, dos semigrupos nilpotentes e dos semigrupos cujos idempotentes comutam.

Palavras-chave: semigrupos inversos, block-groups, representações, pseudovariedades.

Introdução

Seja X um conjunto qualquer. Denotamos por $\mathcal{PT}(X)$ o conjunto de todas as *transformações (parciais)* sobre X, i.e. o conjunto de todas as aplicações com domínio e contradomínio contidos em X. O conjunto $\mathcal{PT}(X)$ munido da operação de *composição de relações* constitui um semigrupo. Por $\mathcal{T}(X)$ denotamos o conjunto de todas as transformações sobre X de domínio X (*transformações totais sobre* X), i.e. o conjunto de todas as aplicações de X em X. Então $\mathcal{T}(X)$ é um subsemigrupo de $\mathcal{PT}(X)$. Observemos que esta operação em $\mathcal{T}(X)$ não passa da composição usual de aplicações. Além disso, é claro que a aplicação identidade sobre X é uma identidade de $\mathcal{PT}(X)$ e pertence a $\mathcal{T}(X)$, pelo que $\mathcal{PT}(X)$ é um monóide e $\mathcal{T}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$. Outro submonóide importante de $\mathcal{PT}(X)$, e que nos interessa em especial, é o *semigrupo inverso simétrico* $\mathcal{I}(X)$, i.e. o conjunto de todas as transformações parciais *injectivas* sobre X. É claro que a aplicação identidade é uma transformação injectiva e que a composição de duas transformações parciais injectivas é uma transformação injectiva, donde $\mathcal{I}(X)$ é um submonóide de $\mathcal{PT}(X)$. Além disso, o conjunto das permutações sobre X está contido em $\mathcal{I}(X)$ e forma um subgrupo de $\mathcal{I}(X)$ (e de $\mathcal{PT}(X)$): o *grupo simétrico sobre* X. Se X for um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), digamos $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, representamos $\mathcal{PT}(X)$ por $\mathcal{PT}_n$, $\mathcal{T}(X)$ por $\mathcal{T}_n$ e $\mathcal{I}(X)$ por $\mathcal{I}_n$.

Seja S um semigrupo. Denotamos por S^1 o monóide obtido a partir de S juntando-lhe uma identidade, se S não for um monóide, ou o próprio S, caso contrário. É bem conhecido que a aplicação

$$\begin{array}{rccccc} \phi : & S & \longrightarrow & \mathcal{T}(S^1) & & \\ & s & \mapsto & \rho_s : & S^1 \to & S^1 \\ & & & & x \mapsto & xs \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo de semigrupos (de monóides, se S for um monóide), pelo que todo o semigrupo [finito] pode ser representado fielmente por meio de de um semigrupo de transformações totais (ou parciais) sobre um certo conjunto [finito]. Também é bem conhecido que todo o semigrupo inverso S admite uma representação fiel em $\mathcal{I}(S)$ (Teorema de Vagner-Preston). Outra representação clássica de um semigrupo inverso é a *representação de Munn*: dado um semigrupo inverso S e denotando por E o semireticulado dos idempotentes de S, a aplicação

$$\begin{array}{rcccccc} \delta : & S & \to & \mathcal{I}(E) & & & \\ & s & \mapsto & \delta_s : & Ess^{-1} & \to & Es^{-1}s \\ & & & & e & \mapsto & s^{-1}es \end{array}$$

é um homomorfismo. Observemos que, em geral, a representação de Munn de um semigrupo inverso não é um homomorfismo injectivo. De facto, o núcleo de δ é a maior congruência que separa idempotentes de S, pelo que δ é um homomorfismo injectivo se e só se S é um semigrupo fundamental (ver [8] ou [9], para mais detalhes).

Neste trabalho estendemos a representação de Munn para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso. Os semigrupos finitos com esta propriedade formam a bem conhecida classe BG de semigrupos designados por *block-groups*. Esta classe de semigrupos finitos forma uma *pseudovariedade de semigrupos* (i.e. uma família de semigrupos finitos fechada para imagens homomorfas, subsemigrupos e produtos directos finitos) e é um dos personagens principais da cadeia de igualdades

$$\Diamond\mathsf{G} = \mathsf{PG} = \mathsf{J} * \mathsf{G} = \mathsf{J} ⓜ \mathsf{G} = \mathsf{BG} = \mathsf{EJ},$$

em que G, J, PG, $\Diamond\mathsf{G}$ e EJ denotam respectivamente a pseudovariedade de todos os grupos, a pseudovariedade de todos os semigrupos $\mathcal{J}$-triviais, a pseudovariedade gerada por todos os monóides de partes de grupos, a pseudovariedade gerada por todos os produtos de Schützenberger de grupos e a pseudovariedade de todos os semigrupos cujos idempotentes geram um semigrupo $\mathcal{J}$-trivial. Para mais detalhes e a história completa destas igualdades, veja-se [11].

A extensão da representação de Munn para semigrupos que possuem no máximo um inverso é apresentada na Secção 1. Na Secção 2 exibimos duas decomposições em produtos de Mal'cev da pseudovariedade BG e concluímos que a classe dos block-groups é a maior família de semigrupos finitos para os quais podemos estender a representação de Munn. Apresentamos na Secção 3 algumas propriedades sobre semireticulados finitos necessárias para as Secções 4 e 5. Na Secção 4 construímos um refinamento da extensão de Munn para block-groups finitos, o qual provamos ser minimal. Finalmente, na Secção 5 descrevemos o menor inteiro não negativo n para o qual existe um homomorfismo que separa idempotentes de um block-group finito S em $\mathcal{PT}_n$.

Assumimos que o leitor possui alguns conhecimentos da Teoria de Semigrupos, nomeadamente sobre relações de Green, congruências, elementos regulares e semigrupos inversos. Estes assuntos são tratados, por exemplo, nos livros de J. Howie [8] e de M. Petrich [9]. Sobre pseudovariedades, pseudoidentidades e outros assuntos sobre semigrupos finitos a nossa referência é o livro de J. Almeida [1].

Este trabalho é essencialmente um resumo alargado do trabalho [5] no qual podem ser encontradas as provas completas dos resultados aqui referidos.

1 Uma extensão da representação de Munn

Nesta secção apresentamos uma extensão da representação de Munn para semigrupos cujos elementos possuem no máximo um inverso. Uma vez que um semigrupo finito com esta propriedade é designado por block-group, designamos também por *block-group* qualquer semigrupo infinito cujos elementos possuam no máximo um inverso. Observemos que, é fácil verificar que S é um block-group se e só se qualquer $\mathcal{R}$-classe e qualquer $\mathcal{L}$-classe possui no máximo um idempotente. Claramente, os semigrupos cujos idempotentes comutam e, em particular, os semigrupos inversos são block-groups.

Seja S um semigrupo. Denotamos por $E(S)$ o conjunto dos idempotentes de S e por $\mathrm{Reg}(S)$ o conjunto dos elementos regulares de S. Associadas às relações de Green $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$ consideramos as relações de quasi-ordem parcial $\leq_{\mathcal{R}}$ e $\leq_{\mathcal{L}}$ definidas, respectivamente, por: para quaisquer $s, t \in S$,

$$s \leq_{\mathcal{R}} t \text{ se e só se } sS^1 \subseteq tS^1$$

e

$$s \leq_{\mathcal{L}} t \text{ se e só se } S^1 s \subseteq S^1 t.$$

Associamos a cada elemento $s \in S$ os seguintes subconjuntos de $E(S)$:

$$\mathcal{R}(s) = \{e \in E(S) \mid e \leq_{\mathcal{R}} s\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(s) = \{e \in E(S) \mid e \leq_{\mathcal{L}} s\}.$$

É fácil verificar que:

(i) Se $e \in \mathcal{R}(s)$ então $es \in \mathrm{Reg}(S)$;

(ii) Se $e \in \mathcal{L}(s)$ então $se \in \mathrm{Reg}(S)$.

Dado um block-group S denotamos por s^{-1} o único inverso de um elemento regular $s \in S$.

Dados um block-group S e $s \in S$, não é difícil provar que:

(i) Se $e \in \mathcal{R}(s)$ então $e = (es)(es)^{-1} = s(es)^{-1} = s(es)^{-1}e$, $(es)^{-1}(es) \in \mathcal{L}(s)$ e $(es)^{-1}(es)\,\mathcal{D}\,e$;

(ii) Se $e \in \mathcal{L}(s)$ então $e = (se)^{-1}(se) = (se)^{-1}s = e(se)^{-1}s$, $(se)(se)^{-1} \in \mathcal{R}(s)$ e $(se)(se)^{-1}\,\mathcal{D}\,e$.

Assim, neste caso, podemos considerar as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \delta_s : & \mathcal{R}(s) & \to & \mathcal{L}(s) \\ & e & \mapsto & (es)^{-1}(es) \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rccc} \bar{\delta}_s : & \mathcal{L}(s) & \to & \mathcal{R}(s) \\ & e & \mapsto & (se)(se)^{-1} \end{array},$$

as quais preservam $\mathcal{D}$-classes. Por outro lado, visto que

$$\begin{aligned} e\delta_s\bar{\delta}_s &= ((es)^{-1}es)\bar{\delta}_s = s(es)^{-1}es(s(es)^{-1}es)^{-1} = (s(es)^{-1}e)s((s(es)^{-1}e)s)^{-1} \\ &= es(es)^{-1} = e, \end{aligned}$$

para qualquer $e \in \mathcal{R}(s)$, e analogamente $f\bar{\delta}_s\delta_s = f$, para qualquer $f \in \mathcal{L}(s)$, então as aplicações δ_s e $\bar{\delta}_s$ são bijecções inversas uma da outra.

Podemos agora estabelecer a nossa representação para block-groups:

Teorema 1.1. *Sejam S um block-group e $E = E(S)$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \delta: & S & \to & \mathcal{I}(E) \\ & s & \mapsto & \delta_s \end{array}$$

é um homomorfismo que separa idempotentes.

Demonstração. Em primeiro lugar mostramos que δ é um homomorfismo. Sejam $s, t \in S$. Comecemos por ver que $\mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t) = \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$. Então $e \in \mathcal{R}(s)$ e $(es)^{-1}(es) = e\delta_s \in \mathcal{R}(t)$, pelo que $e = s(es)^{-1}$ e $(es)^{-1}(es) = tx$, para algum $x \in S^1$. Logo, $e = s(es)^{-1} = s(es)^{-1}(es)(es)^{-1} = stx(es)^{-1}$ e portanto $e \in \mathcal{R}(st)$, ou seja $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Reciprocamente, tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Como $e \in \mathcal{R}(st)$, temos $e = st(est)^{-1}$, donde $e \in \mathcal{R}(s)$, ou seja $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s)$. Em particular, $es \in \mathrm{Reg}(S)$. Por outro lado, $e = est(est)^{-1} = est(est)^{-1}e$, donde $es = (es)t(est)^{-1}(es)$. Além disso, $t(est)^{-1}(es)t(est)^{-1} = t(est)^{-1}$, pelo que $(es)^{-1} = t(est)^{-1}$. Logo, $e\delta_s = (es)^{-1}es = t(est)^{-1}es \in \mathcal{R}(t)$ e portanto $e\delta_s \in \mathrm{Dom}(\delta_t)$. Logo $e \in \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$ e, por conseguinte, $\mathrm{Dom}(\delta_{st}) = \mathrm{Dom}(\delta_s\delta_t)$. Seguidamente, tomemos $e \in \mathrm{Dom}(\delta_{st})$. Então, $e \in \mathcal{R}(s)$, pelo que es é regular. Além disso, $e\delta_s = (es)^{-1}es \in \mathcal{R}(t)$, donde $(es)^{-1}est$ é também regular. Como $est = es(es)^{-1}est$, então $est \;\mathcal{L}\; (es)^{-1}est$. Por outro lado, $e \in \mathcal{R}(st)$, pelo que est é regular. Então, $(est)^{-1}est \;\mathcal{L}\; est \;\mathcal{L}\; (es)^{-1}est \;\mathcal{L}\; ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est$, donde $(est)^{-1}est = ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est$, e portanto

$$e\delta_s\delta_t = ((es)^{-1}(es))\delta_t = ((es)^{-1}est)^{-1}(es)^{-1}est = (est)^{-1}est = e\delta_{st},$$

donde δ é um homomorfismo.

Para mostrar que δ separa idempotentes, tomemos $e, f \in E$ tais que $\delta_e = \delta_f$. Então, em particular, $\mathcal{R}(e) = \mathcal{R}(f)$, pelo que $e \;\mathcal{R}\; f$ e portanto $e = f$. □

Um semigrupo S diz-se *fundamental* se a identidade for a única congruência que separa idempotentes em S. Este conceito [4] é uma extensão para semigrupos arbitrários da noção de semigrupo regular fundamental. Uma definição alternativa é apresentada por Grillet em [6]. De acordo com este autor, um semigrupo diz-se fundamental se a maior congruência contida em $\mathcal{H}$ for a identidade. Esta última definição é, claramente, mais abrangente, visto que qualquer congruência contida em $\mathcal{H}$ separa idempotentes. Além disso, é bem conhecido que estas duas noções coincidem para semigrupos regulares. No entanto, tal não é verdade em geral, mesmo para semigrupos finitos. Por exemplo, se S for um *semigrupo nulo* (i.e. um semigrupo com zero 0 tal que $S^2 = \{0\}$) então S é $\mathcal{H}$-trivial e todas as congruências de S separam idempotentes (note-se que S possui um só idempotente: o zero), pelo que, se S possui pelo menos dois elementos, então a maior congruência de S contida em $\mathcal{H}$ é a identidade e, por outro lado, S possui pelo menos duas congruências distintas que separam idempotentes (a identidade e a universal).

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Teorema 1.1:

Corolário 1.2. *Qualquer block-group fundamental é isomorfo a um subsemigrupo de um semigrupo inverso.* □

É claro que, para um semigrupo inverso S, o homomorfismo δ definido no teorema anterior coincide com a representação de Munn de S original. Assim, mais geralmente para um block-group S, designamos também este homomorfismo por *representação de Munn* de S. Do mesmo modo que a representação de Munn de um semigrupo inverso, o nosso próximo resultado estabelece que, para um block-group eventualmente regular (um semigrupo diz-se *eventualmente regular* se todo o elemento possui uma potência regular), o núcleo de δ coincide com a maior congruência que separa idempotentes de S.

Consideremos a relação binária μ definida sobre um semigrupo arbitrário S por: dados $a, b \in S$, $a \,\mu\, b$ se e só se, para cada elemento regular $x \in S$, as seguintes condições se verificam: $x \,\mathcal{R}\, xa$ implica $xa \,\mathcal{H}\, xb$; $x \,\mathcal{R}\, xb$ implica $xa \,\mathcal{H}\, xb$; $x \,\mathcal{L}\, ax$ implica $ax \,\mathcal{H}\, bx$; e $x \,\mathcal{L}\, bx$ implica $ax \,\mathcal{H}\, bx$. Em [3], Edwards provou que μ é, em geral, uma congruência que separa idempotentes de S e, além disso, se S for um semigrupo eventualmente regular, então μ é a maior congruência que separa idempotentes de S. Por outro lado, podemos provar que núcleo da representação de Munn de um block-group contém μ. Assim, temos:

Corolário 1.3. *O núcleo da representação de Munn de um block-group eventualmente regular S é a maior congruência de S que separa idempotentes.* □

2 Produtos de Mal'cev e a pseudovariedade BG

Nesta secção, apresentamos duas decomposições da pseudovariedade BG em produtos de Mal'cev.

De agora em diante todos os semigrupos considerados neste trabalho são finitos.

Dada uma pseudovariedade de semigrupos V, um semigrupo S diz-se uma V-*extensão* de um semigrupo T se existe um homomorfismo sobrejectivo $\varphi : S \longrightarrow T$ tal que, para cada idempotente e de T, o subsemigrupo $e\varphi^{-1}$ de S pertence a V. Seja W outra pseudovariedade de semigrupos. O *produto de Mal'cev* $\mathsf{V} ⓜ \mathsf{W}$ é a pseudovariedade de semigrupos gerada por todas as V-extensões de elementos de W. Alternativamente, o produto de Mal'cev de pseudovariedades pode ser definido usando "morfismos relacionais". Recordemos que um *morfismo relacional* $\tau : S \multimap T$ de um semigrupo S para um semigrupo T é uma função τ de S em $\mathcal{P}(T)$ tal que:

1. Para qualquer $a \in S$, $a\tau \neq \emptyset$;
2. Para quaisquer $a, b \in S$, $a\tau b\tau \subseteq (ab)\tau$.

Observemos que, para cada idempotente e de T, o conjunto $e\tau^{-1}$ ou é vazio ou é um subsemigrupo de S. Então, um semigrupo S pertence a $\mathsf{V} ⓜ \mathsf{W}$ se e só se existe um morfismo relacional τ de S para um membro T de W tal que, para cada idempotente e de T, se $e\tau^{-1}$ é não vazio então $e\tau^{-1} \in \mathsf{V}$ (ver [10, 7]).

A pseudovariedade BG já foi definida. Denotemos por Ecom a pseudovariedade de todos os semigrupos cujos idempotentes comutam. Observemos que estas duas pseudovariedades podem ser definidas por uma só pseudoidentidade: claramente, temos $\mathsf{Ecom} = [\![x^\omega y^\omega = y^\omega x^\omega]\!]$ e, por outro lado, $\mathsf{BG} = [\![(x^\omega y^\omega)^\omega = (y^\omega x^\omega)^\omega]\!]$ [1] (ver também [11]). Consideremos também a pseudovariedade $\mathsf{EI} = [\![x^\omega = y^\omega]\!]$ de todos os semigrupos que possuem um só idempotente (alguns autores denotam esta pseudovariedade por IE) e a pseudovariedade $\mathsf{N} = [\![x^\omega = 0]\!]$ de todos os semigrupos nilpotentes. Observemos que $\mathsf{EI} = \mathsf{G} \vee \mathsf{N}$ (ver [1]).

Sejam $S \in \mathsf{BG}$ e $E = E(S)$. Uma vez que a representação de Munn $\delta : S \to \mathcal{I}(E)$ de S é um homomorfismo que separa idempotentes e $\mathcal{I}(E) \in \mathsf{Ecom}$, temos imediatamente $S \in \mathsf{EI} ⓜ \mathsf{Ecom}$. Portanto $\mathsf{BG} \subseteq \mathsf{EI} ⓜ \mathsf{Ecom}$. Seguidamente, recordando que $\mathsf{BG} = \mathsf{J} ⓜ \mathsf{G}$, podemos considerar um morfismo relacional ξ de S para algum grupo G tal que $1\xi^{-1} \in \mathsf{J}$. Definamos a função τ de S em $\mathcal{P}(\mathcal{I}(E) \times G)$ por $s\tau = \{(s\delta, g) \in \mathcal{I}(E) \times G \mid g \in s\xi\}$, para qualquer $s \in S$. É fácil ver que τ é um morfismo relacional e, dado um idempotente e de $\operatorname{Im}\delta$, $(e,1)\tau^{-1} = e\delta^{-1} \cap 1\xi^{-1} \in \mathsf{EI} \cap \mathsf{J}$. Como $\mathcal{I}(E) \times G$ é um semigrupo cujos idempotentes comutam e $\mathsf{EI} \cap \mathsf{J} = \mathsf{N}$ (de facto, temos também $\mathsf{EI} \cap \mathsf{A} = \mathsf{N}$: recordemos que $\mathsf{J} = [\![(xy)^\omega = (yx)^\omega, x^{\omega+1} = x^\omega]\!]$ e $\mathsf{A} = [\![x^{\omega+1} = x^\omega]\!]$ [1]), deduzimos que $S \in \mathsf{N} ⓜ \mathsf{Ecom}$, donde temos também $\mathsf{BG} \subseteq \mathsf{N} ⓜ \mathsf{Ecom}$.

Por outro lado, seja S uma EI-extensão de um semigrupo cujos idempotentes comutam T e seja $\varphi : S \longrightarrow T$ um homomorfismo sobrejectivo tal que, para cada idempotente e de T, $e\varphi^{-1} \in \mathsf{EI}$. Tomemos $x, y \in S$. Então $x^\omega\varphi, y^\omega\varphi \in E(T)$, pelo que

$$e = (x^\omega y^\omega)\varphi = x^\omega\varphi y^\omega\varphi = y^\omega\varphi x^\omega\varphi = (y^\omega x^\omega)\varphi$$

é um idempotente de T. Logo $(x^\omega y^\omega)^\omega, (y^\omega x^\omega)^\omega \in e\varphi^{-1}$ e, como $e\varphi^{-1} \in \mathsf{EI}$, temos $(x^\omega y^\omega)^\omega = (y^\omega x^\omega)^\omega$. Assim $S \in \mathsf{BG}$ e portanto $\mathsf{EI} \textcircled{m} \mathsf{Ecom} \subseteq \mathsf{BG}$.

Como $\mathsf{N} \subseteq \mathsf{EI}$, então $\mathsf{N} \textcircled{m} \mathsf{Ecom} \subseteq \mathsf{EI} \textcircled{m} \mathsf{Ecom}$ e portanto:

Teorema 2.1. $\mathsf{BG} = \mathsf{EI} \textcircled{m} \mathsf{Ecom} = \mathsf{N} \textcircled{m} \mathsf{Ecom}$. □

A primeira igualdade estabelecida no resultado anterior permite-nos concluir que a classe dos block-groups é a maior família de semigrupos finitos para os quais podemos considerar uma representação do tipo da de Munn, i.e. um homomorfismo que separa idempotentes num semigrupo inverso simétrico.

3 Dois resultados sobre semireticulados finitos

Seja E um semireticulado finito. Denotemos por 0 o zero de E e, para $e, f \in E$, denotemos por $e \vee f$ o supremo de e e f, quando existe, com respeito à ordem parcial natural $\leq$ de E. Recordemos que $e \leq f$ se e só se $e = ef(= fe)$.

Seja $e \in E$. Dizemos que e é $\vee$-*irredutível* se $e \neq 0$ e, para quaisquer $e_1, e_2 \in E$, $e = e_1 \vee e_2$ implica $e = e_1$ ou $e = e_2$. Dado um subconjunto X de E, denotamos o conjunto dos elementos $\vee$-irredutíveis de E pertencentes a X por $\mathfrak{Irr}_E(X)$, ou simplesmente por $\mathfrak{Irr}(X)$, se não houver ambiguidade.

Exemplo 3.1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $E = E(\mathcal{I}_n)$. Uma vez que E é o conjunto de todas as identidades parciais de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e, para quaisquer $\alpha, \beta \in E$, $\alpha \leq \beta$ se e só se α é uma restrição de β, podemos verificar facilmente que $\mathfrak{Irr}(E) = \left\{ \binom{1}{1}, \binom{2}{2}, \ldots, \binom{n}{n} \right\}$ e portanto $|\mathfrak{Irr}(E)| = n$.

Podemos provar que:

Proposição 3.1. *Sejam $e, f \in E$ tais que $\mathfrak{Irr}(Ee) = \mathfrak{Irr}(Ef)$. Então $e = f$.*

Tendo em conta que um subsemireticulado próprio maximal E' de E tem exactamente $|E| - 1$ elementos, não é muito difícil mostrar que E', mesmo encarado de modo independente, não pode possuir mais elementos $\vee$-irredutíveis do que E. Logo, por indução podemos deduzir o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Se E' é um subsemireticulado de E então $|\mathfrak{Irr}_{E'}(E')| \leq |\mathfrak{Irr}_E(E)|$.*

4 Um refinamento da representação de Munn para block-groups finitos

Nesta secção construímos um homomorfismo que separa idempotentes de um block-group finito S num semigrupo inverso simétrico sobre um subconjunto próprio especial de $E(S)$. Começamos por mostrar que $E(S)$ forma um semi-reticulado e depois consideramos os seus elementos $\vee$-irredutíveis.

Em primeiro lugar, recordemos que

$$\mathsf{BG} = [\![(x^\omega y^\omega)^\omega = (y^\omega x^\omega)^\omega]\!] = [\![(x^\omega y^\omega)^\omega x^\omega = (x^\omega y^\omega)^\omega = y^\omega (x^\omega y^\omega)^\omega]\!]$$

(ver [11]) e que, dado um semigrupo (qualquer) S, a ordem parcial natural $\leq$ de $E(S)$ define-se por $e \leq f$ se e só se $e = ef = fe$, para quaisquer $e, f \in E(S)$.

Sejam $S \in \mathsf{BG}$ e $e, f \in E(S)$. Então, se $e = ef$ temos

$$e = ef = (ef)^\omega = f(ef)^\omega = fe$$

e, analogamente, se $e = fe$ então $e = ef$. Portanto,

$$e \leq f \iff e = fe \iff e = fe.$$

É então fácil mostrar que:

Proposição 4.1. *Seja $S \in \mathsf{BG}$. Então $(E(S), \leq)$ é um $\wedge$-semireticulado. Além disso, o ínfimo $e \wedge f$ de e e f é igual a $(ef)^\omega$, para quaisquer $e, f \in E(S)$.*

Seja $\delta : S \to \mathcal{I}(E)$, com $E = E(S)$, a representação de Munn de S. Então, dado $s \in S$, os conjuntos $\mathcal{R}(s)$ e $\mathcal{L}(s)$ são ideais de ordem de $(E(S), \leq)$ e as aplicações $\delta_s : \mathcal{R}(s) \to \mathcal{L}(s)$ e $\bar{\delta}_s : \mathcal{L}(s) \to \mathcal{R}(s)$ preservam a ordem $\leq$. Além disso, dados $e \in \mathcal{R}(s)$ e $a, b \in E(S)$ tais que $e = a \vee b$, temos necessariamente $a, b \in \mathcal{R}(s)$ e ainda $e\delta_s = a\delta_s \vee b\delta_s$. Analogamente, se $e \in \mathcal{L}(s)$ e $a, b \in E(S)$ são tais que $e = a \vee b$, então $a, b \in \mathcal{L}(s)$ e $e\bar{\delta}_s = a\bar{\delta}_s \vee b\bar{\delta}_s$. Assim, $\delta_s : \mathcal{R}(s) \to \mathcal{L}(s)$ e $\bar{\delta}_s : \mathcal{L}(s) \to \mathcal{R}(s)$ são bijecções inversas uma da outra que preservam elementos $\vee$-irredutíveis, donde podemos concluir que as correspondências

$$\begin{array}{rccc} \vartheta_s : & \mathfrak{Irr}(\mathcal{R}(s)) & \to & \mathfrak{Irr}(\mathcal{L}(s)) \\ & e & \mapsto & (es)^{-1}(es) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \bar{\vartheta}_s : & \mathfrak{Irr}(\mathcal{L}(s)) & \to & \mathfrak{Irr}(\mathcal{R}(s)) \\ & e & \mapsto & (se)(se)^{-1} \end{array}$$

são bijecções inversas uma da outra.

Seguidamente, observemos que, dados um conjunto X, um subconjunto Y de X, um semigrupo (qualquer) S e um homomorfismo $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{PT}(X)$ tal que $Y(s)\varphi \subseteq Y$, para qualquer $s \in S$, é fácil ver que a aplicação $\zeta : S \longrightarrow \mathcal{PT}(Y)$ definida por $(s)\zeta = (s)\varphi|_Y$ (considerada como aplicação em Y), para qualquer $s \in S$, é também um homomorfismo.

Por outro lado, tendo em conta a Proposição 3.1 e o Corolário 1.3, é agora fácil estabelecer o seguinte refinamento da nossa representação de Munn:

Teorema 4.2. *Seja S um block-group finito e seja $U = \mathfrak{Irr}(E(S))$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \vartheta : & S & \rightarrow & \mathcal{I}(U) \\ & s & \mapsto & \vartheta_s \end{array}$$

é um homomorfismo que separa idempotentes. Além disso, o núcleo de ϑ é a maior congruência que separa idempotentes de S.

Tendo em conta o conjunto base do semigrupo inverso simétrico considerado no conjunto de chegada, provamos na próxima secção que o homomorfismo do teorema anterior é minimal.

5 O grau de separação dos idempotentes de um block-group

Seja S um semigrupo finito. Definimos o *grau de separação dos idempotentes*, $\mathfrak{d}(S)$, de S como sendo o menor inteiro não negativo n tal que existe um homomorfismo que separa idempotentes de S em $\mathcal{PT}_n$.

Observemos que, o problema de determinar $\mathfrak{d}(S)$ faz sentido para qualquer semigrupo finito S. No entanto, se substituíssemos $\mathcal{PT}_n$ por $\mathcal{I}_n$, só poderíamos considerar block-groups finitos, de acordo com a observação do fim da Secção 2. Claramente, o menor inteiro não negativo n tal que existe um homomorfismo que separa idempotentes de um semigrupo $S \in \mathsf{BG}$ em $\mathcal{I}_n$ não é menor que $\mathfrak{d}(S)$. Mostramos à frente que, de facto, estes dois números são iguais.

O seguinte lema é fácil de provar:

Lema 5.1. *Sejam S e T dois block-groups finitos e seja $\varphi : S \rightarrow T$ um homomorfismo sobrejectivo. Então $\phi = \varphi|_{E(S)} : (E(S), \wedge) \rightarrow (E(T), \wedge)$ é um homomorfismo sobrejectivo (de semireticulados). Além disso, se φ separa idempotentes então ϕ é um isomorfismo.*

Observemos que, dado $\alpha \in \mathcal{PT}_n$, temos $\alpha = \alpha^2$ se e só se $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathrm{Fix}(\alpha)$.

Seja Y um subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$ e denotemos a identidade parcial de domínio (e imagem) Y por $\imath_Y$. É claro que $\imath_Y \in E(\mathcal{I}_n)$.

Seguidamente, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{ccc} E(\mathcal{PT}_n) & \rightarrow & E(\mathcal{I}_n) \\ \alpha & \mapsto & \overline{\alpha}\,, \end{array}$$

com $\overline{\alpha} = \imath_{\mathrm{Fix}(\alpha)} = \alpha|_{\mathrm{Im}(\alpha)}$, para qualquer $\alpha \in E(\mathcal{PT}_n)$. Então, dados dois idempotentes α e β de $\mathcal{PT}_n$, temos:

(i) Se $\alpha \leq \beta$ então $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$;

(ii) $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \leq \overline{(\alpha\beta)^\omega}$ (e $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} \leq \overline{(\beta\alpha)^\omega}$);

(iii) Se $\overline{(\alpha\beta)^\omega} \leq \overline{\alpha}\,, \overline{\beta}$ então $\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = \overline{(\alpha\beta)^\omega}$.

A partir destas propriedades, podemos então facilmente provar que:

Lema 5.2. *Seja $T \in \mathsf{BG}$ um subsemigrupo de $\mathcal{PT}_n$. Então, a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \xi: & (E(T),\wedge) & \rightarrow & (E(\mathcal{I}_n),\cdot) \\ & \alpha & \mapsto & \overline{\alpha} \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo (de semireticulados).

Seja S um block-group finito. Uma vez que a aplicação $\vartheta : S \rightarrow \mathcal{I}(\mathfrak{Irr}(E(S)))$, definida no Teorema 4.2, é um homomorfismo que separa idempotentes, temos que $\mathfrak{d}(S) \leq |\mathfrak{Irr}(E(S))|$. Por outro lado, seja $\varphi : S \rightarrow \mathcal{PT}_{\mathfrak{d}(S)}$ um homomorfismo que separa idempotentes e seja $T = S\varphi \in \mathsf{BG}$. Então, pelo Lema 5.1, podemos considerar o isomorfismo $\phi = \varphi|_{E(S)} : (E(S),\wedge) \rightarrow (E(T),\wedge)$ e, pelo Lema 5.2, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi\xi: & (E(S),\wedge) & \rightarrow & (E(\mathcal{I}_{\mathfrak{d}(S)}),\cdot) \\ & e & \mapsto & \overline{e\varphi} \end{array}$$

é um homomorfismo injectivo de semireticulados. Logo, pelo Teorema 3.2, temos que $|\mathfrak{Irr}(E(S))| = |\mathfrak{Irr}_{E(S)}(E(S))| \leq |\mathfrak{Irr}_{E(\mathcal{I}_{\mathfrak{d}(S)})}(E(\mathcal{I}_{\mathfrak{d}(S)}))| = \mathfrak{d}(S)$, atendendo ao Exemplo 3.1.

Mostrámos assim que:

Teorema 5.3. *O grau de separação dos idempotentes de um block-group finito é igual ao seu número de idempotentes $\vee$-irredutíveis.* □

Agradecimentos

O autor agradece o apoio da FCT e do FEDER, no âmbito do projecto "Álgebra fundamental e aplicações"– POCTI/MAT/893/2003.

Referências

[1] Almeida, J., "Finite Semigroups and Universal Algebra", World Scientific, Singapore, 1995.

[2] Easdown, D., *The minimal faithful degree of a fundamental inverse semigroup,* Bull. Austral. Math. Soc. **35** (1987), 373–378.

[3] Edwards, P.M., *Eventually regular semigroups,* Bull. Austral. Math. Soc. **28** (1983), 23–38.

[4] Edwards, P.M., *Fundamental semigroups,* Proc. Royal Soc. Edinburgh **99A** (1985), 313–317.

[5] Fernandes, V.H., *The idempotent-separating degree of a block-group,* submetido.

[6] Grillet, P.A., "Semigroups, an Introduction to the Structure Theory", Marcel Dekker, Inc, 1995.

[7] Henckell, K., S. Margolis, J.-E. Pin e J. Rhodes, *Ash's type II theorem, profinite topology and Malcev products. Part I,* Int. J. Algebra Comput. **1** (1991), 411–436.

[8] Howie, J.M., "Fundamentals of Semigroup Theory", Oxford University Press, 1995.

[9] Petrich, M., "Inverse Semigroups", John Wiley & Sons, 1984.

[10] Pin, J.-E., "Varieties of Formal Languages", North Oxford Academic, 1986.

[11] Pin, J.-E., $\mathsf{BG} = \mathsf{PG}$*: a success story,* J. Fountain (ed.), Semigroups, Formal Languages and Groups, 33-47, Kluwer Academic Pub., 1995.

[12] Shevrin, L.N., *The Sverdlovsk Tetrad,* Semigroup Forum **4** (1972), 274–280.

Segundo endereço: Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, Av. Prof. Gama Pinto 2, 1649-003 Lisboa, Portugal.

Inércia de algumas matrizes padrão de sinais simétricas

C.M. da Fonseca

Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, 3001-454 Coimbra, Portugal, e-mail: cmf@mat.uc.pt

Uma matriz cujas entradas consistem nos elementos do conjunto $\{+, -, 0\}$ designa-se por matriz padrão de sinais. Usando conceitos elementares de Álgebra Linear, generalizamos alguns resultados recentes a matrizes padrão de sinais cujo grafo é uma árvore..

Palavras-chave: inércia, matrizes padrão de sinais, matrizes simétricas, árvores.
2000 Mathematics Subject Classification: 15A18; 15A48.

1 Introdução

Diversos autores têm estudado propriedades de uma matriz baseados em informação combinatória e qualitativa como seja a dos sinais das entradas da matriz. Uma matriz cujas entradas pertencem ao conjunto $\{+,-,0\}$ é designada por *matriz padrão de sinais* ou, simplesmente, *padrão de sinais*. Para cada matriz padrão de sinais quadrada, A, de ordem n, existe uma classe natural de matrizes reais cujas entradas têm os sinais indicados por A, que é definida por

$$Q(A) = \{B \mid \operatorname{sign} B = A\}$$

e que designamos por *classe padrão de sinais* de A. Neste trabalho estamos interessados em matrizes simétricas e nas classes simétricas de sinais

$$Q_{SYM}(A) = \{B \mid \operatorname{sign} B = A \text{ e } B = B^T\}\,.$$

Definimos a inércia de uma matriz simétrica real H, $n \times n$, como sendo o terno $\operatorname{In}(H) = (\pi, \nu, \delta)$, onde π é o número de valores próprios positivos, ν é o número de valores próprios positivos e $\delta = n - \pi - \nu$ é o número de valores próprios nulos. Para uma matriz padrão de sinais simétrica A, definimos o *conjunto inércia* de A como sendo $\operatorname{In}(A) = \{\operatorname{In}(B) \mid B \in Q_{SYM}(A)\}$. Diremos que o padrão de sinais A tem *inércia única* e é *não singular por sinais* se toda a matriz real pertencente a $Q(A)$ tem a mesma inércia e é não singular, respectivamente. Dados dois padrões de sinais simétricos A_1 e A_2, se para quaisquer duas matrizes $B_1 \in Q_{SYM}(A_1)$ e $B_2 \in Q_{SYM}(A_2)$ existe uma matriz não singular real S tal que $B_1 = SB_2S^T$, então diremos que A_1 e A_2 são *congruentes por sinais* e escrevemos $A_1 \approx A_2$.

Pela lei de inércia de Sylvester, podemos dizer que dois padrões de sinais simétricos têm a mesma inércia. Por exemplo, o padrão de sinais simétrico

$$\begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{bmatrix}$$

é congruente com

$$\begin{bmatrix} 0 & + & 0 \\ + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & - \end{bmatrix}$$

e, portanto, tem inércia única $(1,2,0)$ e, consequentemente, é não singular por sinais. Por outro lado, o padrão de sinais tridiagonal

$$\begin{bmatrix} + & + & 0 \\ + & + & + \\ 0 & + & + \end{bmatrix}$$

é congruente por sinais

$$\begin{bmatrix} + & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & + \end{bmatrix},$$

onde $*$ representa 0, $+$ ou $-$, e, portanto, o conjunto inércia é $\{(2,0,1),(3,0,0),(2,1,0)\}$.

Um padrão de sinais diagonal cujas entradas (diagonais) são $+$ ou $-$ é designado por *padrão assinatura*. O quadrado de um padrão assinatura é ainda um padrão assinatura em que todas as entradas não nulas são $+$. Um padrão de sinais em que exista exactamente uma entrada em cada coluna e em cada linha igual a $+$ e todas as restantes entradas são nulas é designado por *padrão de permutação*. Dois padrões de sinais congruentes através de um padrão assinatura e um padrão permutação são designados, respectivamente, padrões *congruentes por assinatura* e *congruentes por permutação*.

O grafo G de um padrão quadrado de sinais $A = (a_{ij})$ de ordem n tem como conjunto de vértices $\{1,\ldots,n\}$, e $\{i,j\}$ é uma aresta de G se $a_{ij} \neq 0$.

O objectivo deste trabalho é fornecer um procedimento para determinar o conjunto inércia de um padrão de sinais cujo grafo é uma árvore (i.e., grafo conexo sem ciclos). Começaremos por generalizar resultados recentes de F. Hall, Z. Li et al. (cf. [3, 4, 8, 9]) em alguns padrões simétricos de sinais. Usaremos essencialmente ferramentas de congruências de matrizes (cf. e.g. [1, 2, 5]).

2 Padrões tridiagonais de sinais simétricos

Dado um padrão tridiagonal de sinais simétrico, a inércia não depende dos sinais das entradas não diagonais, já que dois padrões de sinais nestas condições são congruentes por assinatura. Denotaremos essas entradas por $\pm$.

O padrão tridiagonal de sinais simétrico

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \pm & & & & & \\ \pm & * & \pm & & & & \\ & \pm & 0 & \pm & & & \\ & & \pm & * & \pm & & \\ & & & \pm & 0 & \pm & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{2.1}$$

é congruente com

$$\begin{bmatrix} 0 & \pm & & & & & \\ \pm & * & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & \pm & & & \\ & & \pm & * & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & \pm & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

ou seja, é congruente com a soma directa

$$\begin{bmatrix} 0 & \pm \\ \pm & * \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \pm \\ \pm & * \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

se n é ímpar, e com

$$\begin{bmatrix} 0 & \pm \\ \pm & * \end{bmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{bmatrix} 0 & \pm \\ \pm & * \end{bmatrix}$$

se n é par. Atendendo a que a inércia de cada bloco

$$\begin{bmatrix} 0 & \pm \\ \pm & * \end{bmatrix}$$

é $(1, 1, 0)$, podemos generalizar a Proposição 3.1 de [8].

Proposição 2.1. *Para o padrão tridiagonal simétrico de sinais definido em (2.1),*

(a) se n é par, então A é não singular por sinais e $\mathrm{In}(A) = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0)$,

(b) se n é ímpar, então A é singular por sinais e $\mathrm{In}(A) = (\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)$.

Observemos que esta proposição ainda é verdadeira para o padrão de sinais $n \times n$

$$\begin{bmatrix} * & \pm & & & & & \\ \pm & 0 & \pm & & & & \\ & \pm & * & \pm & & & \\ & & \pm & 0 & \pm & & \\ & & & \pm & * & \pm & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

quando n é par.

Consideremos agora o padrão de sinais $n \times n$

$$\begin{bmatrix} + & \pm & & \\ \pm & + & \pm & \\ & \pm & + & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Com o $+$ na entrada $(1,1)$ podemos, através de operações de congruência, eliminar as entradas não diagonais $(1,2)$ e $(2,1)$. Se a nova entrada $(2,2)$ é 0 e $n > 2$, então podemos decompor o padrão de sinais de modo a que o primeiro bloco seja

$$\begin{bmatrix} + & 0 & \\ 0 & 0 & \pm \\ & \pm & 0 \end{bmatrix},$$

cuja inércia é $(2,1,0)$. No caso de $n = 2$, o bloco é simplesmente

$$\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuja inércia é $(1,0,1)$. Se a nova entrada $(2,2)$ é $-$, então podemos decompor o padrão de sinais de modo a que o primeiro bloco seja

$$\begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix},$$

que tem inércia $(1,1,0)$. A nova entrada $(3,3)$ é sempre $+$ e recomeçamos de novo procedimento a partir daqui. Caso contrário, a entrada $(2,2)$ é $+$, e o primeiro bloco da decomposição é simplesmente $[+]$ e recomeçamos de novo procedimento a partir desta entrada.

Pelo algoritmo descrito podemos estimar a inércia de um padrão tridiagonal de sinais simétrico cuja diagonal principal é contituída por $+$.

Proposição 2.2. *Se*

$$A_+ = \begin{bmatrix} + & \pm & & & \\ \pm & + & \pm & & \\ & \pm & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \pm \\ & & & \pm & + \end{bmatrix}$$

é um padrão tridiagonal de sinais simétrico, $n \times n$, então $\mathrm{In}(A_+)$ *é igual a*

$$(n-k, k, 0),\ 0 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \quad \textit{ou} \quad (n-k, k-1, 1),\ 1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

onde $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor ou igual ao número real x.

Diremos que a entrada diagonal (i,i) de um padrão sinais está numa posição ímpar (par) quando i é ímpar (par). As entradas diagonais (i,i) e (j,j) dizem-se estar em posições ascendentes quando $i < j$ (não necessariamente consecutivos).

Podemos agora generalizar alguns dos resultados principais encontrados em [8].

Teorema 2.3. *Para o padrão tridiagonal de sinais simétrico*

$$A_* = \begin{bmatrix} * & \pm & & & \\ \pm & * & \pm & & \\ & \pm & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \pm \\ & & & \pm & * \end{bmatrix},$$

onde cada entrada diagonal é 0, $+$ *ou* $-$,

(a) se n é par, então é não singular por sinais se e só se nem duas entradas diagonais $+$ nem duas $-$ de A_* existem em posições ascendentes ímpar-par, respectivamente. Neste caso $\mathrm{In}(A_*) = (\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, 0)$*;*

(b) Se n é ímpar, então A_* é não singular por sinais se e só se existe pelo menos uma entrada diagonal $+$ ou $-$ numa posição ímpar, mas não ambas em posições ímpares, e nem três entradas diagonais $+$ nem três $-$ em posições ascendentes ímpar-par-ímpar, respectivamente. Neste caso $\mathrm{In}(A_*) = (\frac{n+1}{2}, \frac{n-1}{2}, 0)$ *se existem $+$ em posições ímpares, ou* $\mathrm{In}(A_*) = (\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2}, 0)$ *se existem $-$ em posições ímpares.*

Prova. Suponhamos que n é par. Sem perda de generalidade podemos assumir que a última entrada diagonal é nula. De modo a A_* ter inércia única, quando usamos relações de congruência de modo a eliminar as entradas não diagonais, os sinais das diagonais devem alternar entre $+$ e $-$.

Pela Proposição 2.1, se n é ímpar e nem as entradas diagonais $+$ nem $-$ estão em posições ímpares, então A_* tem inércia única $(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, 1)$. Sem perda de generalidade podemos assumir que a primeira entrada diagonal é não nula. Seja $+$. De novo, através do procedimento de eliminação por congruência, não podemos ter $-$ em posições diagonais e nenhumas três entradas diagonais $+$ posições ascendentes ímpar-par-ímpar. ■

O padrão de sinais

$$\begin{bmatrix} + & + & & & & \\ + & - & - & & & \\ & - & 0 & + & & \\ & & + & 0 & + & \\ & & & + & + & - \\ & & & & - & 0 \end{bmatrix}$$

é congruente com

$$[+] \oplus [-] \oplus \begin{bmatrix} 0 & + \\ + & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto, tem inércia única $(3, 3, 0)$. Contudo, o padrão de sinais

$$\begin{bmatrix} + & + & & & & \\ + & - & - & & & \\ & - & 0 & + & & \\ & & + & + & + & \\ & & & + & + & - \\ & & & & - & 0 \end{bmatrix}$$

é congruente com

$$[+] \oplus [-] \oplus [+] \oplus [*] \oplus \begin{bmatrix} 0 & - \\ - & 0 \end{bmatrix}$$

e o conjunto inércia é $\{(3, 2, 1), (4, 2, 0), (3, 3, 0)\}$.

Vejamos agora um outro exemplo. O padrão de sinais

$$\begin{bmatrix} + & + & & & & & \\ + & - & - & & & & \\ & - & + & + & & & \\ & & + & 0 & + & & \\ & & & + & 0 & - & \\ & & & & - & - & + \\ & & & & & + & + \end{bmatrix}$$

é congruente por sinais com

$$\begin{bmatrix} + & & & & & & \\ & - & & & & & \\ & & + & & & & \\ & & & - & & & \\ & & & & + & & \\ & & & & & - & \\ & & & & & & + \end{bmatrix}$$

e logo tem inércia única $(4, 3, 0)$. Contudo, padrão de sinais

$$\begin{bmatrix} + & + & & & & & \\ + & - & - & & & & \\ & - & + & + & & & \\ & & + & 0 & + & & \\ & & & + & - & - & \\ & & & & - & - & + \\ & & & & & + & + \end{bmatrix}$$

é congruente com

$$[+] \oplus [-] \oplus [+] \oplus [-] \oplus [*] \oplus [-] \oplus [+]$$

e o conjunto inércia é $\{(3, 3, 1), (4, 3, 0), (3, 4, 0)\}$.

3 Padrões de sinais simétricos em estrela

Consideremos agora um padrão de sinais cujo grafo é uma estrela.

Teorema 3.1. *A menos de uma congruência por permutação e assinatura, o padrão de sinais simétricos em estrela*

$$S = \begin{bmatrix} * & + & + & \cdots & + \\ + & * & & & \\ + & & * & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ + & & & & * \end{bmatrix}_{n \times n},$$

onde cada entrada diagonal é 0, $+$ *ou* $-$, *tem inércia única se e só se a diagonal de* S *tem uma das seguintes formas:*

$$(0,+,\ldots,+),\ (-,+,\ldots,+) \quad \textit{ou} \quad (*,\ldots,*)\ ,$$

em que pelos um dos $*$, *numa posição distinta da primeira, é zero.*

Prova. À excepção da entrada $(1,1)$, se uma das entradas diagonais é nula, então

$$S \approx \begin{bmatrix} 0 & + \\ + & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{bmatrix}_{n-2\times n-2} ,$$

e S tem inércia única.

Suponhamos agora que todas as entradas diagonais são não nulas, possivelmente com a excepção da entrada $(1,1)$. Então

$$S \approx [*] \oplus \begin{bmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{bmatrix}_{n-1\times n-1} .$$

Neste caso, S tem inércia única se e só se todas as entradas diagonais diferentes à excepção da $(1,1)$ tem o mesmo sinal e a entrada $(1,1)$ tem sinal diferente das restantes elementos diagonais ou é igual a 0. ∎

4 Padrões acíclicos de sinais simétricos

Tal como na secção anterior, ao padrão tridiagonal de sinais corresponde uma árvore muito particular: um caminho. Para terminar apresentamos um algoritmo que permitirá determinar o conjunto inércia de um padrão de sinais cujo grafo é uma árvore, que designaremos por padrão acíclico de sinais. (Para mais detalhes sobre os conceitos e a terminologia básica aqui utilizada da Teoria de Grafos cf. [10].)

Um vértice de grau 1 diz-se *terminal*. Se o grau de v, $\mathrm{gr}(v)$, é maior ou igual a 2, e existe pelo menos um vértice terminal incidente em v, diremos que v é um *pé* do grafo. Ao subgrafo induzido por um pé e pelos seus vértices terminais designaremos por *subgrafo terminal*.

Consideremos agora um padrão acíclico de sinais A, de ordem n, e seja G o seu grafo. Reordenemos se necessário os índices de modo a que o vértice, digamos k, seja o pé com maior número de vértices terminais e estes sejam $k+1,\ldots,n$. Seja H esse subgrafo terminal. Deste modo temos:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cccc} & & & * & & & \\ & A(G\setminus H) & & \vdots & & & \\ & & & * & & & \\ \hline * & \cdots & * & * & \pm & \cdots & \pm \\ & & & \pm & * & & \\ & & & \pm & & \ddots & \\ & & & \pm & & & * \end{array}\right] . \tag{4.1}$$

Se ao longo do processo de eliminação por congruência do bloco $A(H)$ for possível eliminar as entradas $(1,k),\ldots,(k-1,k)$ e $(k,1),\ldots,(k,k-1)$, então

$$\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(A(G\setminus H)) + \mathrm{In}(A(H)) ,$$

caso contrário

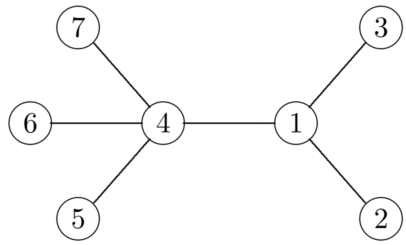
$$\mathrm{In}(A) = \mathrm{In}(A(G\setminus H\cup k)) + \mathrm{In}(A(H\setminus k)) ;$$

aplicamos agora de novo o procedimento ao cálculo da primeira parcela.

Como primeiro exemplo consideremos o seguinte padrão:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cccc} + & - & + & & & & \\ - & - & & & & & \\ + & & + & * & & & \\ \hline & & * & - & + & + & + \\ & & & + & + & & \\ & & & + & & 0 & \\ & & & + & & & - \end{array}\right] .$$

O grafo deste padrão de sinais é



De acordo com algoritmo descrito acima, como

$$A \approx \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & - & \\ + & & + \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & + \\ + & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix},$$

a inércia de A é

$$\mathrm{In}(A) = \mathrm{In} \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & - & \\ + & & + \end{bmatrix} + (2,2,0)\ .$$

Finalmente

$$\mathrm{In} \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & - & \\ + & & + \end{bmatrix} = \{(1,1,1),(2,1,0),(1,2,0)\}\ .$$

Suponhamos ainda com o mesmo grafo, que o padrão de sinais tem diagonal nula, ou seja,

$$B = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & - & + & & & & \\ - & 0 & & & & & \\ + & & 0 & * & & & \\ \hline & & * & 0 & + & + & + \\ & & & + & 0 & & \\ & & & + & & 0 & \\ & & & + & & & 0 \end{array}\right].$$

De acordo com o algoritmo apresentado

$$\mathrm{In}(B) = \mathrm{In} \begin{bmatrix} 0 & - & + \\ - & 0 & \\ + & & 0 \end{bmatrix} + (1,1,2) = (2,2,3)\ .$$

Em geral, quando temos um padrão acíclico de sinais particionado com em 4.1, digamos B, e com entradas diagoniais todas nulas, a inércia é única e podemos calculá-la

$$\mathrm{In}(B) = \mathrm{In}(B(G \setminus H)) + (1, 1, n - k - 1) \ .$$

Deste modo, existe sempre um número inteiro positivo ℓ tal que

$$\mathrm{In}(B) = (\ell, \ell, n - 2\ell) \ .$$

Agradecimento

Este trabalho foi financiado pelo CMUC - Centro de Matemática da Universidade de Coimbra.

Referências

[1] B.E. Cain e E. Marques de Sá, The inertia of Hermitian matrices with a prescribed 2×2 block decomposition. Linear and Multilinear Algebra **31** (1992), 119 – 130.

[2] B.E. Cain e E. Marques de Sá, The inertia of certain skew-triangular block matrices. Linear Algebra Appl. **160** (1992), 75 – 85.

[3] C. Eschenbach e C.R. Johnson, A combinatorial converse to the Perron-Frobenius theorem. Linear Algebra Appl. **136** (1990), 173 – 180.

[4] C. Eschenbach e C.R. Johnson, Sign patterns that require real, non-real or pure imaginary eigenvalues. Linear and Multilinear Algebra **29** (1991), 299 – 311.

[5] C.M. da Fonseca, The inertia of Hermitian tridiagonal block matrices. JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math. **5** (2004), no. 3, Artigo 56.

[6] C.M. da Fonseca, On the inertia sets of some symmetric sign patterns. Czechoslovak Math. J. aceite para publicação.

[7] Y. Gao e Y. Shao, The inertia set of nonnegative symmetric sign pattern with zero diagonal. Czechoslovak Math. J. **53** (2003), 925 – 934.

[8] F.J. Hall e Z. Li, Inertia sets of symmetric sign pattern matrices. Numer. Math. J. Chinese Univ. (English Ser.) **10** (2001), 226 – 240.

[9] F.J. Hall, Z. Li e Di Wang, Symmetric sign pattern matrices that require unique inertia. Linear Algebra Appl. **338** (2001), 153 – 169.

[10] F. Harary, The determinant of the adjacency matrix of a graph. SIAM Rev. **4** (1962), 202-210.

[11] R.A. Horn e C.R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[12] C. Jeffries e C.R. Johnson, Some sign patterns that preclude matrix stability. SIAM J. Matrix Anal. Appl. **9** (1988), 19 – 25.

Factorização de espectro arbitrário: Caso não-derrogatório

C.R.Johnson 1[a], Yulin Zhang 2[b]

[b]Universidade do Minho, e-mail: zhang@math.umino.pt

[a]Department of Mathematics College of William and Mary, e-mail: crjohnso@MATH.WM.EDU

Foi provado que uma matriz complexa A pode ser factorizada em $A = BC$, onde os valores próprios de A e B estão prescritos, sob uma única condição $\det B \det C = \det A$. Provamos que, de facto, B e C podem ser não- -derrogatórias, mesmo quando os valores próprios de A e B têm repetições.

Palavras-chave: Jordan, factorização LU especial, não-derrogatória.

1. Problema

Teorema de Sourour (1986)[1][2]: Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ uma matriz não singular, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in \mathbb{C}$ e $\prod_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i = det(A)$. Então existem matrizes $B,\ C \in M_n(\mathbb{C})$ com valores próprios $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ e $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, respectivamente, tais que $A = BC$.

O teorema do Sourour não fala nada sobre quais as possíveis formas de Jordan de B e C. De facto, caso $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, e $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ são distintos, então B e C são não-derrogatórias. Mas em geral, B e C não podem ser arbitrárias. Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \beta_1 = \beta_2 = 2,\ \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}.$$

Nesse caso não podemos encontrar matrizes B e C tais que $A = BC$ e ambas B, C têm 2 blocos de Jordan.

2. Resultados.

O objectivo deste trabalho é mostrar que B e C podem ser não-derrogatórias, e ainda que quase sempre, B e C podem ter formas especiais. Diz-se que A tem uma factorização LU especial, se a sub-diagonal de L e a sobre-diagonal de U são totalmente não-nulas, isto é

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & & \\ x_1 & \beta_2 & & 0 & \\ & x_2 & \ddots & & \\ * & & \ddots & & \\ & & & x_{n-1} & \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & y_1 & & & \\ & \gamma_2 & y_2 & & * \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & y_{n-1} \\ & & & & \gamma_n \end{bmatrix},$$

em que $x_i \neq 0$, $y_i \neq 0$.

Nota se: $S^{-1}AS = S^{-1}BCS = (S^{-1}BS)(S^{-1}CS)$. Então, no futuro em vez de A, podemos considerar a semelhança de A.

Factorização de A pode ser especial é equivalente a procurar uma semelhança de A, tal que os menores principais de A são $\beta_1\gamma_1,\ \beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2,\ ...,\ \beta_1 \cdots \beta_n \gamma_1 \cdots \gamma_n$ e a sua factorização LU é especial.

Ou por Formulário de Cauchy-Binet:

Factorização de A pode ser especial $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{l} detA[1,...,k,k+2|1,...,k+1] \\ detA[1,...,k+1|1,...,k,k+2] \end{array}$$

são totalmente não-nulos $k=0,...,n-2$,

ou por Identidade de Sylvester $\Leftrightarrow$

$$detA[1,...,k,k+2] \neq \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k+1}}^{k+2} \beta_i\gamma_i \qquad k=0,...,n-2.$$

Theorem 1. *Seja* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *uma matriz não singular, não escalar,* $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in \mathbb{C}$ *e* $\prod_{i=1}^{n} \beta_i\gamma_i = det(A)$. *Então existe uma matriz* A' *semelhante a* A *e* A' *tem factorização* LU *especial se e só se não existe* i, $1 \leq i \leq n$, *tal que* $rank(A - \beta_i\gamma_i I) = 1$.

Demonstração (ver [3]).

Theorem 2. *Se existe* i, *tal que* $rank(A - \beta_i\gamma_i I) = 1$, *então nesse caso* A *não tem factorização* LU *especial.*

Demonstração: Seja $\lambda \in \sigma(A)$ e $A = LU$ é especial.

Então $A - \lambda I = LU - \lambda I = L(U - \lambda L^{-1})$. Como a sub-diagonal de L é totalmente não nula, a sub-diagonal de L^{-1} também é. Como $\beta_1, ..., \beta_n$ $(\gamma_1, ..., \gamma_n)$ são elementos diagonais de L (U), então as diagonais de $U - \lambda L^{-1}$ são

$$\gamma_1 - \frac{\lambda}{\beta_1}, \gamma_2 - \frac{\lambda}{\beta_2}, ..., \gamma_n - \frac{\lambda}{\beta_n}.$$

$$U - \lambda L^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_1 - \frac{\lambda}{\beta_1} & * & . & . \\ * & \gamma_2 - \frac{\lambda}{\beta_2} & * & . \\ . & & & . \\ & * & . & * \\ . & . & * & \gamma_n - \frac{\lambda}{\beta_n} \end{bmatrix}.$$

As sub-e sobre-diagonais de $U - \lambda L^{-1}$ são totalmente não nulas. Se $\gamma_i - \dfrac{\lambda}{\beta_i} = 0$ $(\lambda = \beta_i\gamma_i)$, então rank$(U - \lambda L^{-1})$ ter que ser pelo menos 2. $\square$

Mas nesse caso A ainda tem factorização não-derrogatórias (mais detalhados, ver [3]).

Como se evita o caso excepcional? Por exemplo, seja
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\beta_1 = 1, \beta_2 = 3/2, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$.

Como os valores próprios de A são $1, 3$, então este caso é um caso excepcional. Mas se trocar a ordem de β_1, β_2, já temos um caso não excepcional, quer dizer que A já pode ter factorização especial de LU.

Para β_i se existe um γ_i tal que $\beta_i\gamma_j = \lambda$, chama-se a (β_i, γ_j) um λ-par. Denotamos por $m(\beta_i)$ $(resp; m(\gamma_i))$ a multiplicidade de β_i $(resp; \gamma_i)$ e $TM(\beta_i, \gamma_j) = m(\beta_i) + m(\gamma_j)$ a total multiplicidade de λ-par (β_i, γ_j).

Theorem 3. *(ver [3]) Dados $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n, \lambda$, é possível re-arranjar os β_i e γ_i, de tal forma que*

(1) os β's iguais ocorrem consecutivamente,

(2) $\beta_{j_i}\gamma_{k_i} \neq \lambda$, $i = 1, ..., n$

se e só se não há λ-par tal que $TM(\beta_p, \gamma_q) > n$.

Referências

[1] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge Univ.Press, 1991.

[2] A. Sourour, A Factorization Theorem for Matrices, *Linear Multilinear* 19 (1986), 141-147.

[3] C. R. Johnson, Yulin Zhang, Spectrally Arbitrary Factorization: The Nonderogatory Case, submetido.

Classes de Operadores (Primeiras Derivações) com Contradomínio Numérico Elíptico

R. Lemos[a], N. Bebiano[b] e J. da Providência[c]

[a]Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro, 3810-193 Aveiro, rute@mat.ua.pt

[b]Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 3001-454 Coimbra, bebiano@ci.uc.pt

[c]Departamento de Física, Universidade de Coimbra, 3004-516 Coimbra, providencia@teor.fis.uc.pt

Resumo

Descrevem-se novas classes de operadores com contradomínio numérico elíptico. Nomeadamente, considera-se a primeira derivação de uma matriz A de ordem n, restrita ao m-ésimo espaço completamente simétrico sobre $\mathbb{C}^n$, $m \in \mathbb{N}$. Mostra-se que estes operadores admitem contradomínios numéricos homotéticos, de forma elíptica se $n = 2$ e, sob determinadas condições, quando $n = 3$. Generaliza-se o resultado ao contradomínio numérico-c, $c \in \mathbb{R}^{m+1}$, e apresenta-se uma classe de matrizes tridiagonais com contradomínio numérico-c elíptico. Consideram-se ainda operadores de emparelhamento bosónicos e fermiónicos de contradomínios numéricos hiperbólicos e elípticos, respectivamente.

Palavras-chave: contradomínio numérico, Teorema de Murnaghan, operadores de criação e destruição.

1 Contradomínio numérico clássico

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo separável dotado de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e seja A um operador linear definido em $\mathcal{H}$. O *contradomínio numérico* do operador A é o subconjunto do plano complexo que se denota e define por

$$W(A) \;=\; \{\langle Ax,x\rangle : x\in\mathcal{H},\, \langle x,x\rangle = 1\}\,.$$

A literatura sobre este conjunto remonta a 1918, a dois artigos famosos de Toeplitz [22] e de Hausdorff [15] que estabelecem uma das propriedades geométricas mais importantes do contradomínio numérico: a sua convexidade. Desde então, esta teoria tem suscitado o interesse de uma vasta comunidade de investigadores, sendo de sublinhar o seu alcance em aplicações a diferentes ramos da matemática pura e aplicada, como a análise matricial, teoria de operadores, análise funcional, análise numérica, álgebras-C^*, teoria de sistemas, equações diferenciais, e ainda em Física [1-4] e Arquitectura [20].

Em espaços de dimensão finita, $W(A)$ é um conjunto conexo e compacto; não necessariamente limitado nem fechado, caso contrário. Outra propriedade basilar desta teoria é a inclusão do espectro do operador A no fecho topológico de $W(A)$ [14]. Aliás, uma das razões do interesse do contradomínio numérico em Física reside justamente no facto deste conjunto encerrar informação sobre o operador A, particularmente, sobre a localização dos seus valores próprios. Particularmente interessante é o estudo da relação entre as propriedades algébricas e analíticas do operador e as propriedades geométricas do seu contradomínio numérico. Por exemplo, $W(A)$ é um subconjunto do eixo real se e só se A é um operador auto-adjunto.

Se $\mathcal{H}$ é de dimensão finita n, podem obviamente representar-se os vectores de $\mathcal{H}$ por n-uplos complexos e o operador A por um elemento da álgebra M_n das matrizes quadradas complexas de ordem n. Considerando $\mathbb{C}^n$ munido do produto interno euclidiano, define-se o *contradomínio numérico* da matriz $A\in M_n$ por

$$W(A) \;=\; \{x^*A\,x:\; x\in\mathbb{C}^n,\; x^*x=1\}.$$

Neste contexto, também se usa a designação *campo de valores* e a notação $F(A)$ [16]. Murnaghan [19] e Kippenhahn [18] provaram, independentemente, que $W(A)$ é o invólucro convexo de uma curva algébrica $C(A)$, designada *curva geradora de fronteira* de A, cuja equação em coordenadas lineares homogéneas é

$$\det\left(u\,\mathrm{Re}A + v\,\mathrm{Im}A + wI_n\right) \;=\; 0,$$

onde $\mathrm{Re}A = \frac{1}{2}\,(A+A^*)$ e $\mathrm{Im}A = \frac{1}{2i}\,(A-A^*)$. Esta curva algébrica tem *classe* n, o que significa que por um ponto genérico do plano passam n rectas tangentes à curva [12, 21]. Contudo, o seu grau pode ser superior a n, para $n > 2$. Além disso, os n focos reais de $C(A)$ são os valores próprios da matriz A.

Se $n = 2$, o Teorema do Contradomínio Elíptico [16] estabelece que $W(A)$ é um disco elíptico (possivelmente degenerado) de focos nos valores próprios α_1 e α_2 de A, e de eixos maior e menor de comprimento

$$\sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A) \, - \, 2\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha}_1\alpha_2)} \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2}$$

respectivamente. Se $n = 3$, então $W(A)$ pode tomar a forma elíptica, cónica ou triangular, ovular ou com uma única porção plana na fronteira [17] e, se $n \geq 4$, desconhece-se em geral a forma geométrica de $W(A)$. Contudo, várias classes de matrizes admitem contradomínio numérico elípticos, independentemente da sua ordem. É o caso das matrizes quadráticas [23], isto é, que satisfazem uma equação quadrática de coeficientes constantes, e de certas matrizes tridiagonais [6, 7, 11], ou seja, matrizes de entrada a_{ij} nula, se $|i - j| < 1$.

Neste artigo, descrevem-se novas classes de operadores com contradomínio numérico elíptico. Nomeadamente, o contradomínio numérico da *primeira derivação* de uma matriz $A \in M_2$ restricta ao m-ésimo espaço simétrico sobre $\mathbb{C}^2$, $m \in \mathbb{N}$, é um disco elíptico. Generaliza-se este resultado ao contradomínio numérico-c, $c \in \mathbb{R}^{m+1}$, e caracteriza-se o contradomínio numérico-c de determinadas matrizes tridiagonais de ordem $m + 1$. Prova-se ainda a existência de uma relação de homotetia de razão m entre $W(A)$ e o contradomínio numérico da primeira derivação de $A \in M_n$ restricta ao m-ésimo espaço simétrico sobre $\mathbb{C}^n$, apresentando-se uma condição necessária e suficiente para o caso elíptico, quando $n = 3$. Neste estudo, intervêm as noções de operadores de criação e destruição de bosões, familiares em Física Quântica. Finalmente, apresentam-se os contradomínios numéricos de *operadores de emparelhamento*. No caso bosónico, estes operadores são ilimitados, admitindo representações matriciais tridiagonais infinitas bem estruturadas com contradomínios numéricos hiperbólicos [4]. No caso fermiónico, mostra-se que a curva geradora de fronteira do contradomínio numérico é uma elipse e eventualmente dois pontos.

2 Primeira derivação e operadores de criação e destruição de bosões

Em Mecânica Quântica, descrevem-se os estados de uma partícula por vectores de um espaço de Hilbert, dito o *espaço de estados*. Em sistemas físicos compostos por várias partículas idênticas, torna-se útil definir operadores que criam ou destroem partículas em estados individuais específicos. Outros operadores de interesse físico podem exprimir-se à custa destes operadores de criação e destruição [5].

Seja $\mathcal{H}$, um espaço de Hilbert complexo n-dimensional, o espaço de estados de uma só partícula, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um base ortonormada de $\mathcal{H}$ e $m \in \mathbb{N}$. O m-ésimo espaço (completamente) simétrico sobre $\mathcal{H}$, denotado por $\mathcal{H}_{(m)}$, é os espaço de estados adequado para descrever sistemas com m bosões, ou seja, partículas que obedecem a estatística de Bose-Einstein. Por convenção, $\mathcal{H}_{(0)} = \mathbb{C}$. Introduz-se o *operador de criação bosónico* $f_i : \mathcal{H}_{(m)} \to \mathcal{H}_{(m+1)}$, $i = 1, \ldots, n$, como o operador linear definido por

$$f_i(x_1 * \cdots * x_m) \;=\; e_i * x_1 * \cdots * x_m,$$

para cada tensor decomponível $x_1 * \cdots * x_m \in \mathcal{H}_{(m)}$. O operador linear adjunto de f_i é o *operador de destruição bosónico* $g_i : \mathcal{H}_{(m+1)} \to \mathcal{H}_{(m)}$ definido por

$$g_i(x_1 * \cdots * x_{m+1}) \;=\; \sum_{k=1}^{m+1} \langle e_i, x_k \rangle \, x_1 * \cdots * x_{k-1} * x_{k+1} \wedge \cdots * x_{m+1},$$

para cada $x_1 * \cdots * x_{m+1} \in \mathcal{H}_{(m+1)}$. Podem estender-se estes operadores à álgebra simétrica sobre $\mathcal{H}$, $\bigoplus_{m=0}^{n} \mathcal{H}_{(m)}$, de modo óbvio, considerando-se esta munida da norma induzida pelo produto interno $\langle x^*, y^* \rangle = \operatorname{per}[\langle x_i, y_j \rangle]$, onde $x^* = x_1 * \cdots * x_m$, $y^* = y_1 * \cdots * y_m$ são vectores decomponíveis de $\mathcal{H}_{(m)}$ e $\operatorname{per} X$ denota o permanente da matriz X. Os operadores de criação e destruição de bosões satisfazem as *relações de comutação canónicas:*

$$[f_i, f_j] \;=\; [g_i, g_j] \;=\; 0, \qquad [g_i, f_j] = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

onde $[f, g] = fg - gf$ denota o *comutador* dos operadores f e g. O operador linear $N_i = f_i\, g_i : \mathcal{H}_{(m)} \to \mathcal{H}_{(m)}$ diz-se o *operador número no estado* i, $i = 1, \ldots, n$, e os seus valores próprios são os números $0, 1, 2 \ldots, m$.

Dado um operador linear A definido em $\mathcal{H}$, o *operador induzido* por A em $\mathcal{H}_{(m)}$ é o operador linear $P_m(A) : \mathcal{H}_{(m)} \to \mathcal{H}_{(m)}$ que actua sobre os tensores $x_1 * \cdots * x_m \in \mathcal{H}_{(m)}$ de acordo com a fórmula:

$$P_m(A)\,(x_1 * \cdots * x_m) \;=\; Ax_1 * \cdots * Ax_m.$$

Pela multilineariedade do produto simétrico, tem-se

$$P_m(I_n + tA)\,(x_1 * \cdots * x_m) \;=\; \sum_{r=0}^{m} t^r \sum_{\alpha \in Q_{r,m}} x_1 * \cdots * Ax_{\alpha_1} * \cdots * Ax_{\alpha_r} * \cdots * x_m,$$

onde $Q_{r,m}$ é o conjunto das sucessões estritamente decrescentes de comprimento r de números inteiros de 1 a m. Pela propriedade universal do produto simétrico, garante-se a existência de um único operador linear $P_m^{(r)}A : \mathcal{H}_{(m)} \to \mathcal{H}_{(m)}$, para cada $r = 0, \ldots, m$, tal que

$$P_m^{(r)}A\,(x_1 * \cdots * x_m) \;=\; \sum_{\alpha \in Q_{r,m}} x_1 * \cdots * Ax_{\alpha_1} * \cdots * Ax_{\alpha_r} * \cdots * x_m.$$

O operador $P_m^{(r)}A$ diz-se a r-*ésima derivação* de A em $\mathcal{H}_{(m)}$. Neste contexto, a r-ésima derivação de A é completamente determinada, em termos do operador induzido, pela fórmula:

$$P_m(I + tA) \;=\; \sum_{r=0}^{m} t^r P_m^{(r)}A.$$

Se $r = 0$, então $P_m^{(r)}A$ reduz-se à aplicação identidade em $\mathcal{H}_{(m)}$. Em Física, o conceito de primeira derivação é mais relevante do que o conceito de operador induzido. Observáveis de natureza aditiva, tais como a energia cinética, momento linear ou momento angular, ocorrem com frequência. Se A representar uma tal quantidade para um sistema com uma só partícula, então $P_m^{(1)}A$ representa a quantidade correspondente para um sistema com m partículas satisfazendo a estatística de Bose-Einstein [3]. Se $r = 1$, visto que $Q_{1,m} = \{1, \ldots, m\}$, a *primeira derivação* do operador A em $\mathcal{H}_{(m)}$ satisfaz

$$P_m^{(1)}A\,(x_1 * \cdots * x_m) \;=\; \sum_{i=1}^{m} x_1 * \cdots * Ax_i * \cdots * x_m.$$

Define-se a primeira derivação de uma matriz $A \in M_n$ em $\mathbb{C}^n_{(m)}$ de modo análogo. Considera-se, agora, o operador linear definido na álgebra simétrica sobre $\mathbb{C}^n$ por

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_i g_j, \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

à custa de operadores de criação e destruição de bosões. Quando restrito ao subespaço $\mathbb{C}^n_{(m)}$, o operador apresentado em (1) é justamente a primeira derivação da matriz $A \in M_n$ de elemento genérico a_{ij} em $\mathbb{C}^n_{(m)}$.

Com vista a simplificar o estudo, caso $n = 2$, consideram-se os operadores lineares f_1 e f_2 definidos na álgebra simétrica sobre $\mathbb{C}^2$ por

$$f_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}\,(f_1 - z f_2) \qquad \text{e} \qquad f_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}\,(f_2 + \overline{z} f_1), \tag{2}$$

com $z \in \mathbb{C}$. Os seus operadores adjuntos são dados por

$$g_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}\,(g_1 - \overline{z} g_2) \qquad \text{e} \qquad g_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}\,(g_2 + z g_1), \tag{3}$$

respectivamente.

Lema 2.1. *Se $A = [a_{ij}] \in M_2$ é uma matriz Hermítica, então a primeira derivação de A em $\mathbb{C}^2_{(m)}$ transforma-se, por meio de (2) e (3), com $z \in \mathbb{C}$, na forma*

$$P_m^{(1)}A \;=\; \left(af_1g_1 + bf_2g_1 + \bar{b}f_1g_2 + cf_2g_2\right)\big|_{\mathbb{C}^2_{(m)}}, \tag{4}$$

onde

$$a \;=\; \frac{1}{1+|z|^2}\left(a_{11} + a_{22}|z|^2 - a_{12}z - \overline{a_{12}z}\right), \tag{5}$$

$$b \;=\; \frac{1}{1+|z|^2}\left((a_{11} - a_{22})z + \overline{a_{12}} - a_{12}z^2\right), \tag{6}$$

$$c \;=\; \frac{1}{1+|z|^2}\left(a_{11}|z|^2 + a_{22} + a_{12}z + \overline{a_{12}z}\right). \tag{7}$$

Demonstração: A partir de (2) e (3), obtêm-se as seguintes relações inversas:

$$f_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\,(f_1 + zf_2), \qquad f_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\,(f_2 - \bar{z}f_1) \tag{8}$$

e

$$g_1 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\,(g_1 + \bar{z}g_2), \qquad g_2 \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\,(g_2 - zg_1). \tag{9}$$

Substituindo (8) e (9) em $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}f_ig_j\big|_{\mathbb{C}^2_{(m)}}$, tem-se o pretendido. ∎

O próximo teorema caracteriza os valores próprios λ_k, $k = 0, \ldots, m$, da primeira derivação de uma matriz Hermítica de ordem dois em $\mathbb{C}^2_{(m)}$. Por conveniência, considera-se a seguinte ordem não crescente: $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_m$.

Teorema 2.1. *Seja $A = [a_{ij}] \in M_2$ uma matriz Hermítica. Então os valores próprios da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^2_{(m)}$ são dados por*

$$\lambda_k \;=\; \frac{m}{2}(a_{11} + a_{22}) + \frac{m-2k}{2}\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2}, \qquad k = 0, \ldots, m.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.1, pode tomar-se $P_m^{(1)}A$ na forma (4), com a, b, c dados por (5), (6), (7), respectivamente. Facilmente se obtém

$$a - c \;=\; \frac{(a_{11} - a_{22})\left(1 - |z|^2\right) - 2\,\overline{a_{12}z} - 2\,a_{12}z}{1+|z|^2} \tag{10}$$

e é possível determinar um número complexo z tal que b se anula. De facto, se A é uma matriz escalar, então $b = 0$, qualquer que seja $z \in \mathbb{C}$. Se A é uma matriz diagonal não escalar, toma-se $z = 0$. Se A é não diagonal, então considera-se $z = (a_{11} - a_{22} \pm \Delta)/(2a_{12})$, onde $\Delta = \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4|a_{12}|^2}$. Neste caso, $\overline{a_{12}}(|z|^2 - 1) = (a_{11} - a_{22})\,z$ e $\overline{a_{12}}(|z|^2 + 1) = \pm\Delta z$. Substituindo z na expressão

(10), mediante alguns cálculos, vem $a-c=\mp\Delta$. Atendendo a que $a+c=a_{11}+a_{22}$, valem as igualdades $a=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})\pm\frac{1}{2}\Delta$ e $c=\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})\mp\frac{1}{2}\Delta$. Pode, portanto, reduzir-se a primeira derivação $P_m^{(1)}A$ à forma $\left(af_1g_1+cf_2g_2\right)\big|_{\mathbb{C}^2_{(m)}}$ e os seus valores próprios são do tipo

$$\lambda_k \;=\; a(m-k)+ck, \qquad k=0,\ldots,m. \tag{11}$$

Substituindo a e c em (11), vem

$$\lambda_k \;=\; \frac{m}{2}(a_{11}+a_{22})\pm\frac{m-2k}{2}\Delta, \qquad k=0,\ldots,m. \tag{12}$$

Uma vez que se assume a ordem não crescente para os valores próprios de $P_m^{(1)}A$, substitui--se o sinal '$\pm$' em (12) por '$+$'. ■

3 Contradomínio numérico da primeira derivação

Uma recta que intersecta $W(A)$ em pelo menos um ponto e que define dois semi--planos, um dos quais não contém ponto algum de $W(A)$, diz-se uma *recta de suporte* de $W(A)$. Para cada $\theta\in[0,2\pi)$, designemos por λ_θ o valor próprio máximo (ou mínimo) da matriz $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A)$, com $A\in M_n$. As rectas de equação $x=\lambda_\theta$ são as rectas de suporte verticais de $W(\mathrm{e}^{i\theta}A)$. Submetendo-as a uma rotação segundo o ângulo $-\theta$, descrevem-se todas as rectas de suporte de $W(A)$, à medida que θ varia de 0 a 2π, o que permite, deste modo, caracterizar a fronteira de $W(A)$.

Mostra-se, de seguida, que o contradomínio numérico da primeira derivação de uma matriz arbitrária $A\in M_2$ em $\mathbb{C}^2_{(m)}$ é um disco elíptico.

Teorema 3.1. *Seja $A\in M_2$ a matriz de valores próprios α_1 e α_2. O contradomínio numérico da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^2_{(m)}$ é o disco elíptico (possivelmente degenerado) de focos $m\alpha_1$ e $m\alpha_2$, eixos maior e menor de comprimento*

$$m\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^*A)-2\,\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha}_1\alpha_2)} \qquad e \qquad m\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^*A)-|\alpha_1|^2-|\alpha_2|^2},$$

respectivamente.

Demonstração: Como a primeira derivação de $A=[a_{ij}]\in M_2$ em $\mathbb{C}^2_{(m)}$ é dada pelo operador $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}f_ig_j\big|_{\mathbb{C}^2_{(m)}}$, verifica-se que

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}P_m^{(1)}A) \;=\; \left(a_\theta f_1g_1+b_\theta f_1g_2+\bar{b}_\theta f_2g_1+c_\theta f_2g_2\right)\big|_{\mathbb{C}^2_{(m)}},$$

onde $a_\theta=\mathrm{Re}(a_{11}\mathrm{e}^{i\theta})$, $c_\theta=\mathrm{Re}(a_{22}\mathrm{e}^{i\theta})$ e $2b_\theta=a_{12}\mathrm{e}^{i\theta}+\overline{a_{21}}\mathrm{e}^{-i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi)$. Pelo Teorema 2.1, os valores próprios máximo e mínimo do operador auto-adjunto

$\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}P_m^{(1)}A) = P_m^{(1)}\big(\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A)\big)$ e que definem as rectas de suporte de $W(P_m^{(1)}A)$ são da forma $\pm\, m\, q_\theta$, onde

$$q_\theta \;=\; \frac{1}{2}(a_\theta + c_\theta) + \frac{1}{2}\sqrt{(a_\theta - c_\theta)^2 + 4|b_\theta|^2},$$

ou seja, estão relacionados por uma homotetia de razão m com os valores próprios $\pm\, q_\theta$ que definem as rectas de suporte de $W(P_1^{(1)}A)$, quando θ varia de 0 a 2π. A representação matricial de $P_1^{(1)}A$, na base canónica de $\mathbb{C}^2$, é obviamente dada pela matriz A, sendo o seu contradomínio numérico descrito pelo Teorema do Contradomínio Elíptico. A descrição geométrica de $W(P_m^{(1)}A)$, $m \geq 2$, decorre da respectiva descrição no caso $m = 1$, dada a relação de homotetia entre as fronteiras destes dois conjuntos, concluindo-se que $W(P_m^{(1)}A)$ é um disco elíptico homotético a $W(A)$ e de razão m. ■

Estamos, agora, em condições de apresentar uma nova classe de matrizes tridiagonais com contradomínio numérico elíptico. Basta observar que o conjunto

$$\mathcal{B} \;=\; \left\{ \frac{e_1^{m-k} * e_2^k}{\sqrt{(m-k)!k!}},\ k = 0, \ldots, m \right\}$$

constitui uma base ortonormada do espaço simétrico $\mathbb{C}^2_{(m)}$ e a representação matricial da primeira derivação de uma matriz arbitrária $A = [a_{ij}] \in M_2$ em $\mathbb{C}^2_{(m)}$, na base canónica $\mathcal{B}$, é uma matriz tridiagonal de ordem $m+1$ do tipo

$$T_A \;=\; \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_1 & a_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_m \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{array}{rcll} a_k &=& a_{11}\, m + (a_{22} - a_{11})k, & k = 0, \ldots, m, \\ b_k &=& a_{12}\sqrt{k(m-k+1)}, & k = 1, \ldots, m, \\ c_k &=& a_{21}\sqrt{k(m-k+1)}, & k = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Então a classe das matrizes tridiagonais T_A, de ordem $m+1$, $m \in \mathbb{N}$, tem o seu contradomínio numérico dado por um disco elíptico, descrito em pormenor no Teorema 3.1.

Dada uma matriz arbitrária $A \in M_2$, estabelecemos uma relação de homotetia entre $W(A)$ e o contradomínio numérico da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^2_{(m)}$. Veremos que se pode estender este resultado a qualquer matriz $A \in M_n$.

Lema 3.1. *Se $A \in M_n$ é uma matriz Hermítica e $\alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n$ são os valores próprios de A, então os valores próprios da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^n_{(m)}$ são*

$$\lambda_{k_1,\ldots,k_n} \;=\; k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n, \quad k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}_0, \quad k_1 + \cdots + k_n = m.$$

Demonstração: Os elementos de uma base do m-ésimo espaço simétrico sobre $\mathbb{C}^n$ podem escrever-se na forma $e_1^{k_1} * \cdots * e_n^{k_n}$, onde $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}_0$ são tais que $k_1 + \cdots + k_n = m$. Sendo $A \in M_n$ uma matriz Hermítica de valores próprios $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, pode reduzir-se a primeira derivação de A em $\mathbb{C}^n_{(m)}$ à forma $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i g_i \big|_{\mathbb{C}^n_{(m)}}$. Como $N_i = f_i g_i$ satisfaz

$$N_i(e_1^{k_1} * \cdots * e_n^{k_n}) \;=\; k_i\, e_1^{k_1} * \cdots * e_n^{k_n}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

conclui-se que os valores próprios de $\sum_{i=1}^n \alpha_i N_i \big|_{\mathbb{C}^n_{(m)}}$ são do tipo $\lambda_{k_1,\ldots,k_n}$. ■

Teorema 3.2. *Se $A \in M_n$, então o contradomínio numérico da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^n_{(m)}$ coincide com $m\,W(A)$.*

Demonstração: Seja $A = [a_{ij}] \in M_n$. A primeira derivação da matriz A em $\mathbb{C}^n_{(m)}$ é dada pelo operador (1). Observa-se que

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta} P_m^{(1)} A) \;=\; \sum_{i=1}^n a_{ii}^\theta f_i g_i + \sum_{i<j} \left(a_{ij}^\theta f_i g_j + \overline{a_{ij}^\theta} f_j g_i \right), \qquad \theta \in [0, 2\pi),$$

onde

$$a_{ii}^\theta \;=\; \mathrm{Re}\,(a_{ii}\mathrm{e}^{i\theta}), \quad 1 \leq i \leq n, \qquad \text{e} \qquad a_{ij}^\theta \;=\; \frac{a_{ij}\mathrm{e}^{i\theta} + \overline{a_{ji}}\,\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Como $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A) = [a_{ij}^\theta]$, verifica-se que $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta} P_m^{(1)} A) = P_m^{(1)} \left(\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A)\right)$, cujos valores próprios são, atendendo ao Lema 3.1, definidos em termos dos valores próprios $\alpha_1^\theta \leq \cdots \leq \alpha_n^\theta$ da matriz Hermítica $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A)$ por $k_1\alpha_1^\theta + \cdots + k_n\alpha_n^\theta$, $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N}_0$, $k_1 + \cdots + k_n = m$. O valor próprio máximo do operador auto-adjunto $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta} P_m^{(1)} A)$ é $m\alpha_n^\theta$ e define as rectas de suporte do contradomínio numérico da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^n_{(m)}$, à medida que θ varia de 0 a 2π. Ora, $m\alpha_n^\theta$ está relacionado, por uma homotetia de razão m, com o maior valor próprio α_n^θ da matriz Hermítica $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A)$ que determina os pontos da fronteira de $W(A)$, quando θ varia de 0 a 2π. Pela convexidade do contradomínio numérico e conhecida a fronteira de $W(A)$, conclui-se que $W(P_m^{(1)}A) = mW(A)$. ■

Como vimos, em consequência do Teorema do Contradomínio Elíptico, a primeira derivação de A em $\mathbb{C}^n_{(m)}$ admite sempre um contradomínio numérico elíptico, quando $n = 2$. Obtemos ainda descrições elípticas, para $n = 3$, mas impondo determinadas condições na matriz A. Para tal, baseamo-nos no seguinte lema de Keeler, Rodman e Spitkovsky [17].

Lema 3.2. *Seja $A \in M_3$ de valores próprios $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Então a curva geradora da fronteira de $W(A)$ é um ponto p e uma elipse $\mathcal{E}$ se e só se*

1. $d = \mathrm{Tr}(A^*A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 > 0$*;*
2. $\mathrm{Tr}(A) + \frac{1}{d}\left(\alpha_1|\alpha_1|^2 - \alpha_2|\alpha_2|^2 - \alpha_3|\alpha_3|^2 - \mathrm{Tr}(A^*A^2)\right) = \alpha_3$*.*

Além disso, $W(A)$ é um disco elíptico se e só se valem as condições 1.*,* 2. *e*

3. $(|\alpha_1 - \alpha_3| + |\alpha_2 - \alpha_3|)^2 - |\alpha_1 - \alpha_2|^2 \leq d$*.*

Nas condições do Lema 3.2, o ponto p que constitui a curva geradora de fronteira $C(A)$ é dado pelo valor próprio α_3 e os focos da elipse $\mathcal{E}$ são os valores próprios α_1, α_2. A condição 3. assegura que o ponto α_3 pertence ao domínio delimitado pela elipse $\mathcal{E}$.

Como consequência imediata do Teorema 3.2 e do Lema 3.2, obtemos os seguintes corolários, o último dos quais apresenta uma condição necessária e suficiente para o contradomínio numérico da primeira derivação de $A \in M_3$ em $\mathbb{C}^3_{(m)}$ assumir a forma elíptica, incluindo a respectiva descrição geométrica.

Corolário 3.1. *Seja $A \in M_3$ de valores próprios $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. O contradomínio numérico da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^3_{(m)}$ é o invólucro convexo de um ponto e de uma elipse se e só se as condições* 1. *e* 2. *do Lema* 3.2 *se verificam.*

Corolário 3.2. *Seja $A \in M_3$ de valores próprios $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. O contradomínio numérico da primeira derivação de A em $\mathbb{C}^3_{(m)}$ é um disco elíptico se e só se são satisfeitas as condições* 1.*,* 2. *e* 3 *do Lema* 3.2*. Neste caso, os focos da elipse são $m\alpha_1$, $m\alpha_2$ e o seu eixo menor tem comprimento*

$$m\sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2}.$$

4 Contradomínio numérico-c da primeira derivação

Como generalização do contradomínio numérico clássico, Westwick [24] introduziu o contradomínio numérico-c de $A \in M_n$, para $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, conjunto que se denota e define por

$$W_c(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i^* A x_i : \ \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ uma base ortonormada de } \mathbb{C}^n \right\}.$$

Se $c = (1, 0, \ldots, 0)$, então $W_c(A)$ reduz-se ao contradomínio numérico clássico $W(A)$. O Teorema de Westwick [24] assegura que $W_c(A)$, $c \in \mathbb{R}^n$, é convexo. Além disso, este conjunto é conexo, compacto e unitariamente invariante por transformações de semelhança unitária de A. Observa-se, ainda, que

$$W_c(\alpha I_n + \beta A) \; = \; \alpha \sum_{i=1}^{n} c_i + \beta\, W_c(A), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são os valores próprios de A, então os pontos

$$z_\sigma \; = \; \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_{\sigma(i)}, \qquad \sigma \in S_n,$$

onde S_n denota o grupo simétrico de grau n, dizem-se os *pontos-σ* de $W_c(A)$ e desempenham um papel central nesta teoria. Sem perda de generalidade, pode fixar-se uma ordem para as coordenadas de c, visto que uma sua reordenação não afecta a forma do conjunto $W_c(A)$. Assume-se, por conseguinte, a ordem não-crescente: $c_1 \geq \cdots \geq c_n$.

Se $n = 2$, Goldberg e Straus [13] descreveram $W_c(A)$ como um disco elíptico (possivelmente degenerado), cujos focos são os pontos-σ, $z_{\mathrm{id}} = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$ e $z_{(12)} = \alpha_1 c_2 + \alpha_2 c_1$, cujos eixos maior e menor têm comprimento

$$|c_1 - c_2| \sqrt{\mathrm{Tr}(A^* A) \; - \; 2\,\mathrm{Re}(\overline{\alpha}_1 \alpha_2)} \qquad \text{e} \qquad |c_1 - c_2| \sqrt{\mathrm{Tr}(A^* A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2},$$

respectivamente. Recentemente, Chien e Nakazato [8, 9] obtiveram uma útil representação paramétrica para a fronteira do contradomínio numérico-c de uma matriz arbitrária $A \in M_n$, apresentada no lema seguinte.

Lema 4.1. *Seja $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $A \in M_n$ e $\lambda(\theta) = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^\theta$, onde $\lambda_1^\theta \geq \cdots \geq \lambda_n^\theta$ são os valores próprios da matriz $\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta} A\right)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Então $W_c(A)$ é o invólucro convexo da curva $\{X(\theta) + i\, Y(\theta) : \; \theta \in [0, 2\pi)\}$, onde*

$$\begin{aligned} X(\theta) \;&=\; \cos\theta\, \lambda(\theta) - \sin\theta\, \lambda'(\theta) \\ Y(\theta) \;&=\; -\sin\theta\, \lambda(\theta) - \cos\theta\, \lambda'(\theta). \end{aligned}$$

Prova-se, antes de mais, um interessante resultado sobre a invariância do contradomínio numérico-c, $c \in \mathbb{R}^n$, perante a troca de duas entradas simétricas relativamente à diagonal principal de uma matriz tridiagonal arbitrária. Generalizamos, deste modo, resultados recentes de Brown e Spitkovsky [6] sobre o contradomínio numérico clássico e de Chien e Nakazato [10] relativo a matrizes tridiagonais com diagonal principal de zeros.

Teorema 4.1. *Seja* $c \in \mathbb{R}^n$ *e* $A = [a_{ij}] \in M_n$ *uma matriz tridiagonal. O contradomínio numérico-c é is invariante por troca da posição relativa das entradas não diagonais* a_{jj+1} *e* a_{j+1j}*, para cada* $j = 1, \ldots, n-1$.

Demonstração: Para cada $j = 1, \ldots, n-1$, seja $\widehat{A}_j$ a matriz tridiagonal que apenas difere de A por troca das entradas a_{jj+1} e a_{j+1j}. Por indução sobre n, facilmente se verifica que o polinómio característico de $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A)$ coincide com o de $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}\widehat{A}_j)$, $\theta \in [0, 2\pi)$. Se $n = 2$, a afirmação é verdadeira. Suponhamos a afirmação válida para todas as matrizes tridiagonais de ordem não superior a n. Prova-se que também vale para as de ordem $n+1$, isto é, para as matrizes

$$B = \begin{bmatrix} A & b \\ d & a_{n+1n+1} \end{bmatrix},$$

em que b e d denotam os vectores coluna e linha, com todas as entradas nulas, excepto possivelmente a última igual a $a_{n-1n} \in \mathbb{C}$ ou a $a_{nn+1} \in \mathbb{C}$, respectivamente. Então

$$\widehat{B}_j = \begin{bmatrix} \widehat{A}_j & b \\ d & a_{n+1n+1} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \qquad \text{e} \qquad \widehat{B}_n = \begin{bmatrix} A & d^T \\ b^T & a_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

diferem de B por troca das entradas a_{jj+1} e a_{j+1j}, $j = 1, \ldots, n$, respectivamente. Denotemos por A' a matriz que se obtém de A, eliminando a linha e coluna n. O polinómio característico $p_{n+1,B}(t)$ de $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}B)$ é dado por

$$\Big(t - \mathrm{Re}\,(a_{n+1n+1}\mathrm{e}^{i\theta})\Big)\, p_{n,A}(t) - \frac{1}{4}\left|a_{nn+1}\mathrm{e}^{i\theta} + \overline{a_{n+1n}}\mathrm{e}^{-i\theta}\right|^2 p_{n-1,A'}(t), \tag{13}$$

em que $p_{n,A}(t) = \det\big(tI_n - \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}A)\big)$ e $p_{n-1,A'}(t) = \det\big(tI_{n-1} - \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}A')\big)$. Pela hipótese indutiva, tem-se

$$p_{n,A}(t) = p_{n,\widehat{A}_j}(t) \qquad \text{e} \qquad p_{n-1,A'}(t) = p_{n-1,\widehat{A}'_j}(t).$$

Portanto, $p_{n+1,B}(t)$ coincide com o polinómio característico da matriz $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}\widehat{B}_j)$, $j = 1, \ldots, n-1$. Por outro lado, não ocorre diferença alguma ao inverter as posições de a_{nn+1} e a_{n+1n} em (13), então $p_{n+1,B}(t)$ também é o polinómio característico de $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}\widehat{B}_n)$. Concluída a demonstração por indução, verifica-se que $\mathrm{Re}\,(\mathrm{e}^{i\theta}A)$ e $\mathrm{Re}\,\big(\mathrm{e}^{i\theta}\widehat{A}_j\big)$ possuem os mesmos valores próprios, $\theta \in [0, 2\pi)$. Pelo Lema 4.1, tem-se $W_c(A) = W_c(\widehat{A}_j)$, qualquer que seja $c \in \mathbb{R}^n$. ■

Obtemos, agora, a caracterização elíptica do contradomínio numérico-c da primeira derivação de uma matriz 2×2 restricta a $\mathbb{C}^2_{(m)}$, desde que sejam distintas as duas primeiras componentes do vector $c \in \mathbb{R}^{m+1}$, a partir da descrição da curva geradora de fronteira de $W_c(A)$ disponibilizada pelo Lema 4.1.

Teorema 4.2. *Seja* $c = (c_0, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, *com* $c_0 > c_1 \geq \cdots \geq c_m$, *e* $A \in M_2$ *de valores próprios* α_1 *e* α_2. *Então* $W_c\,(P_m^{(1)}A)$ *é um disco elíptico (possivelmente degenerado) de focos*

$$\sum_{k=0}^{m} ((m-k)\alpha_1 + k\alpha_2)\,c_k \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=0}^{m} (k\alpha_1 + (m-k)\alpha_2)\,c_k$$

e de eixos maior e menor de comprimento

$$|s_c|\sqrt{\operatorname{Tr}(A^*A) - 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_1\alpha_2)} \qquad e \qquad |s_c|\sqrt{\operatorname{Tr}(A^*A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2}, \tag{14}$$

respectivamente, onde $s_c = \sum_{k=0}^{m}(m-2k)\,c_k$.

Demonstração: Seja $A = [a_{ij}]$ e $B = A - \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A)\,I_2$. A multilinearidade do produto simétrico garante que $P_m^{(1)}A = \frac{m}{2}\operatorname{Tr}(A)\,\mathrm{id} + P_m^{(1)}B$, onde id denota a aplicação identidade em $\mathbb{C}^2_{(m)}$. Verifica-se que

$$\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}P_m^{(1)}B) \;=\; \big(a_\theta(f_1g_1 - f_2g_2) + b_\theta f_1g_2 + \bar{b}_\theta f_2g_1\big)\big|_{\mathbb{C}^2_{(m)}}, \qquad \theta \in [0, 2\pi),$$

onde $a_\theta = \operatorname{Re}\big((a_{11} - a_{22})\,\mathrm{e}^{i\theta}\big)$ e $2b_\theta = a_{12}\mathrm{e}^{i\theta} + \overline{a_{21}}\mathrm{e}^{-i\theta}$. Pelo Teorema 2.1, os valores próprios da primeira derivação da matriz Hermítica $\operatorname{Re}\big(\mathrm{e}^{i\theta}B\big)$ restrita a $\mathbb{C}^2_{(m)}$ são da forma $\beta_k^\theta = \frac{1}{2}(m-2k)\sqrt{2a_\theta + 4|b_\theta|^2}$, $k = 0, \ldots, m$. Pelo Lema 4.1, $W_c(P_m^{(1)}B)$ é o invólucro convexo da curva $\{X_m(\theta) + i\,Y_m(\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$, onde

$$X_m(\theta) \;=\; \cos\theta\,\lambda_m(\theta) - \sin\theta\,\lambda_m'(\theta), \tag{15}$$

$$Y_m(\theta) \;=\; -\sin\theta\,\lambda_m(\theta) - \cos\theta\,\lambda_m'(\theta), \tag{16}$$

com $\lambda_m(\theta) = \sum_{i=0}^{m} c_i\,\beta_i^\theta = \frac{s_c}{2}\sqrt{2a_\theta + 4|b_\theta|^2}$. Ora, $(c_0 - c_1)\,\lambda_m(\theta) = s_c\,\lambda_1(\theta)$. Sendo $c_0 > c_1$, de (15) e (16), derivam-se as relações:

$$X_m(\theta) \;=\; \frac{s_c}{c_0 - c_1}X_1(\theta) \qquad \text{e} \qquad Y_m(\theta) \;=\; \frac{s_c}{c_0 - c_1}Y_1(\theta),$$

isto é, ocorre uma relação de homotetia de razão $|s_c|/|c_0 - c_1|$ entre as curvas geradoras de fronteira dos conjuntos $W_c\,(P_m^{(1)}B)$, $m \geq 2$, e $W_{c'}(P_1^{(1)}B) = W_{c'}(B)$, $c' = (c_0, c_1)$. Se $\pm\beta_1$ são os valores próprios de B, então $W_{c'}(B)$ é o disco elíptico centrado na origem, com focos nos pontos-σ $\pm(c_0 - c_1)\beta_1$, eixos maior e menor de comprimento

$$|c_0 - c_1|\sqrt{\operatorname{Tr}(B^*B) + 2|\beta_1|^2} \qquad \text{e} \qquad |c_0 - c_1|\sqrt{\operatorname{Tr}(B^*B) - 2|\beta_1|^2},$$

respectivamente. Portanto, $\partial W_c\,(P_m^{(1)}B)$ é uma elipse de focos $\pm\,s_c\,\beta_1$. Como os valores próprios de A são da forma $\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(A) \pm \beta_1$, facilmente se verificam as identidades:

$$\operatorname{Tr}(A^*A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2 \;=\; \operatorname{Tr}(B^*B) - 2|\beta_1|^2,$$

$$\operatorname{Tr}(A^*A) - 2\operatorname{Re}(\bar{\alpha}_1\alpha_2) \;=\; \operatorname{Tr}(B^*B) + 2|\beta_1|^2,$$

e então (14) determina o comprimento dos eixos maior e menor da fronteira elíptica de $W_c\,(P_m^{(1)}B)$. A partir da relação existente entre $P_m^{(1)}A$ e $P_m^{(1)}B$, tem-se

$$W_c\Big(P_m^{(1)}A\Big) \;=\; \mathrm{Tr}(A)\,\frac{m}{2}\sum_{i=0}^{m} c_i \;+\; W_c\Big(P_m^{(1)}B\Big)\,,$$

donde se conclui o pretendido. ■

Denote-se por A_μ^τ a matriz tridiagonal com diagonal principal nula, primeira subdiagonal constante igual a μ e superdiagonal igual a τ. Eiermann [11] provou que $W(A_\mu^\tau)$ é um disco elíptico e Chien [8] generalizou este resultado ao contradomínio numérico-c , obtendo

$$W_c(A_\mu^\tau) \;=\; \left\{\mu z + \tau\bar{z} :\; z \in \mathbb{C},\; |z| \leq \sum_{j=1}^{n} c_j \cos\frac{j\pi}{n+1}\right\}.$$

Outros contradomínios numéricos-c elípticos têm sido obtidos para matrizes tridiagonais $A = [a_{ij}] \in M_n$ com diagonal principal de zeros; por exemplo, $W_c(A)$ é um disco elíptico [10] se existem $\mu, \eta \in \mathbb{C}$ tais que

$$|a_{jj+1}| + |a_{j+1j}| \;=\; |\mu| + |\eta| \qquad \text{e} \qquad a_{jj+1}a_{j+1j} \;=\; \mu\eta, \qquad j = 1, \ldots, n-1.$$

A partir dos Teoremas 4.1 e 4.2, apresentamos uma nova classe de matrizes tridiagonais com contradomínio numérico-c elíptico.

Corolário 4.1. *Seja $c = (c_0, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, com $c_0 > c_1 \geq \cdots \geq c_m$, seja $A = [a_{ij}] \in M_2$ de valores próprios α_1, α_2 e*

$$T_A^J \;=\; \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ d_1 & a_1 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & a_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_m \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} a_k &= a_{11}\,m + (a_{22} - a_{11})k, & k &= 0, \ldots, m, \\ b_k &= u_k\sqrt{k(m-k+1)}, & k &= 1, \ldots, m, \\ d_k &= v_k\sqrt{k(m-k+1)}, & k &= 1, \ldots, m, \end{aligned}$$

com $u_k = a_{21}$, $v_k = a_{12}$, se $k \in J$, e $u_k = a_{12}$, $v_k = a_{21}$, se $k \in J'$, para $J \cup J' = \{1, \ldots, m\}$, $J \cap J' = \emptyset$. Então o contradomínio numérico-c da matriz tridiagonal T_A^J é um disco elíptico (possivelmente degenerado) de focos

$$\sum_{k=0}^{m}((m-k)\alpha_1 + k\alpha_2)\,c_k \qquad e \qquad \sum_{k=0}^{m}(k\alpha_1 + (m-k)\alpha_2)\,c_k$$

e de eixos maior e menor de comprimento

$$|s_c|\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^*A) - 2\,\mathrm{Re}(\bar{\alpha}_1\alpha_2)} \qquad e \qquad |s_c|\sqrt{\mathrm{Tr}\,(A^*A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2},$$

respectivamente, onde $s_c = \sum_{k=0}^{m}(m-2k)\,c_k$.

Demonstração: A representação matricial da primeira derivação da matriz A restrita a $\mathbb{C}^2_{(m)}$, na base canónica $\mathcal{B}$, é dada pela matriz tridiagonal $T_A^{\emptyset}$, cujo contradomínio numérico-c é especificado no Teorema 4.2. Ora T_A^J é a matriz tridiagonal que resulta de $T_A^{\emptyset}$ por troca das entradas b_j e d_j, $j \in J$. Obtem-se o resultado pretendido, a partir do Teorema 4.1 que assegura a invariância do contradomínio numérico-c por troca da posição relativa destes elementos não diagonais. ∎

5 Considerações finais

Para além da primeira derivação de uma matriz $A = [a_{ij}] \in M_2$, estudada anteriormente, também se podem considerar *operadores de emparelhamento* definidos na álgebra simétrica sobre $\mathbb{C}^2$, em termos de operadores de criação e destruição de bosões por

$$B \;=\; a_{11}f_1g_1 + a_{12}f_1f_2 + a_{21}g_1g_2 + a_{22}f_2g_2. \tag{17}$$

Estes operadores B são ilimitados e o seu contradomínio numérico tem um comportamento bastante distinto do contradomínio numérico da primeira derivação.

Observa-se que a álgebra simétrica sobre $\mathbb{C}^2$ se pode decompor numa soma directa, $\bigoplus_{q=-\infty}^{+\infty}\Gamma^{(q)}$, de subespaços $\Gamma^{(q)}$ gerados pelos vectores $e_1^{n+\tau_q} * e_2^{n+\kappa_q}$, $n \in \mathbb{N}_0$, onde se consideram $\tau_q = \frac{1}{2}\,(|q| - q)$ e $\kappa_q = \frac{1}{2}\,(|q| + q)$, $q \in \mathbb{Z}$. Estes subespaços $\Gamma^{(q)}$ são invariantes pelo operador de emparelhamento B, para cada $q \in \mathbb{Z}$, verificando-se que a matriz tridiagonal infinita

$$T_B^q \;=\; \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & a_1 & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & c_2 & a_2 & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & c_3 & a_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} a_n &= a_{11}(n+\tau_q) + a_{22}(n+\kappa_q), && n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= a_{21}\sqrt{n(n+|q|)}, && n \in \mathbb{N}, \\ c_n &= a_{12}\sqrt{n(n+|q|)}, && n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

é a representação matricial de B restrito a $\Gamma^{(q)}$, na base canónica

$$\mathcal{B}^q \;=\; \left\{ \frac{e_1^{n+\tau_q} * e_2^{n+\kappa_q}}{\sqrt{(n+\tau_q)!\,(n+\kappa_q)!}} \;:\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

O contradomínio numérico destes operadores de emparelhamento toma a forma hiperbólica (possivelmente degenerada), bem como as suas representações matriciais tridiagonais infinitas. Apresenta-se a caracterização completa do contradomínio numérico do operador de emparelhamento restrito a $\Gamma^{(q)}$, $q \in \mathbb{Z}$, no Teorema seguinte que obtivemos em [4].

Teorema 5.1. *Seja $A = [a_{ij}] \in M_2$, B o operador de emparelhamento definido em* (17),

$$\lambda_q^\eta \;=\; \frac{1+|q|}{2}\left(-(a_{11}+a_{22}) + \eta\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}}\right) + \tau_q a_{11} + \kappa_q a_{22},$$

com $\eta \in \{-1,0,1\}$, $q \in \mathbb{Z}$, e

$$\begin{array}{rcl} M &=& \frac{1}{2}|(a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}| - \frac{1}{2}|a_{11}+a_{22}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2, \\ N &=& \frac{1}{2}|(a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}| + \frac{1}{2}|a_{11}+a_{22}|^2 - |a_{12}|^2 - |a_{21}|^2. \end{array}$$

a) *Se $M > 0$ e $N > 0$, então $W(B|_{\Gamma^{(q)}})$ é limitado por um ramo da hipérbole de focos em λ_q^1 e λ_q^{-1}, eixos transverso e não-transverso de comprimento $(1+|q|)\sqrt{N}$ e $(1+|q|)\sqrt{M}$, respectivamente.*
b) *Se $M > 0$ e $N = 0$, então $W(B|_{\Gamma^{(q)}})$ é:*
  i. *a recta r_q, se $|a_{12}| = |a_{21}|$;*
  ii. *um semi-plano aberto definido pela recta r_q, se $|a_{12}| \neq |a_{21}|$;*
em que r_q é a recta que passa por λ_q^0 e é perpendicular ao segmento que une os pontos λ_q^1 e λ_q^{-1}.
c) *Se $M > 0$ e $N < 0$, então $W(B|_{\Gamma^{(q)}})$ é todo o plano complexo.*
d) *Se $M = 0$ e $N > 0$, então $W(B|_{\Gamma^{(q)}})$ é uma semi-recta fechada de extremo λ_q^1 ou λ_q^{-1}, paralela ao segmento que une λ_q^1 a λ_q^{-1}.*
e) *Se $M = N = 0$, então $W(B|_{\Gamma^{(0)}})$ é:*
  i. *o conjunto singular $\{\lambda_q^0\}$, se $\mathrm{Tr}(A) = 0$;*
  ii. *a semi-recta aberta de extremo λ_q^0, contendo $\tau_q a_{11} + \kappa_q a_{22}$, se $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.*

A partir do Teorema 5.1, é ainda possível revelar a existência de uma relação de homotetia entre os conjuntos $W(B|_{\Gamma^{(q)}})$ uma vez que

$$W(B|_{\Gamma^{(q)}}) \;=\; (1+|q|)\,W(B|_{\Gamma^{(0)}}) + \tau_q a_{11} + \kappa_q a_{22}, \qquad q \in \mathbb{Z}.$$

Introduzimos, anteriomente, as noções de operadores de criação e destruição de bosões , isto é, de partículas que ocorrem em estados totalmente simétricos. Na

Natureza, observam-se ainda estados anti-simétricos e as partículas que ocorrem nestes estados dizem-se *fermiões*, ou seja, obedecem a estatística de Fermi-Dirac. O m-ésimo espaço de Grassmann sobre $\mathcal{H}$, denotado por $\bigwedge^m \mathcal{H}$, $m \in \mathbb{N}$, é o espaço adequado para descrever sistemas com m fermiões, com a convenção $\bigwedge^0 \mathcal{H} = \mathbb{C}$. Define-se o *operador de criação fermiónico* $f_i : \bigwedge^{m-1} \mathcal{H} \to \bigwedge^m \mathcal{H}$, $i = 1, \ldots, n$, como o operador linear tal que

$$f_i(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{m-1}) \; = \; e_i \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_{m-1},$$

para cada $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{m-1} \in \bigwedge^{m-1} \mathcal{H}$. O seu operador adjunto é o *operador de destruição fermiónico* $g_i : \bigwedge^m \mathbb{C}^n \to \bigwedge^{m-1} \mathbb{C}^n$ definido por

$$g_i(x_1 \wedge \cdots \wedge x_m) \; = \; \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \langle e_i, x_k \rangle \, x_1 \wedge \cdots \wedge x_{k-1} \wedge x_{k+1} \wedge \cdots \wedge x_m,$$

para cada $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m \in \bigwedge^m \mathcal{H}$. Podem estender-se estes operadores à álgebra de Grassmann algebra sobre $\mathcal{H}$, $\bigoplus_{m=0}^{n} \bigwedge^m \mathcal{H}$, que se considera munida da norma induzida pelo produto interno $\langle x^\wedge, y^\wedge \rangle = \det[\langle x_i, y_j \rangle]$, para $x^\wedge = x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$, $y^\wedge = y_1 \wedge \cdots \wedge y_m$ tensores decomponíveis de $\bigwedge^m \mathcal{H}$. Neste caso, são satisfeitas as *relações de anti-comutação canónicas:*

$$\{f_i, f_j\} \; = \; \{g_i, g_j\} \; = \; 0, \qquad \{g_i, f_j\} \; = \; \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

onde $\{f, g\} = fg + gf$ denota o *anti-comutador* dos operadores f e g.

Podemos, agora, introduzir a noção de *operador de emparelhamento* na álgebra de Grassmann sobre $\mathbb{C}^2$ como o operador linear

$$B \; = \; a_{11} f_1 g_1 + a_{12} f_1 f_2 + a_{21} g_1 g_2 + a_{22} f_2 g_2, \qquad a_{ij} \in \mathbb{C}, \quad i, j = 1, 2, \tag{18}$$

definido à custa de operadores de criação e destruição de fermiões. A investigação do contradomínio numérico destes operadores podia seguir passos semelhantes aos utilizados no caso bosónico [4]. Contudo, optamos por uma via mais rápida, atendendo à representação matricial do operador na base $\{1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}$ da álgebra de Grassmann sobre $\mathbb{C}^2$ e ao facto bem conhecido [16] do contradomínio numérico de uma soma directa de matrizes $A_1 \oplus A_2$ coincidir com o invólucro convexo de $W(A_1)$ e $W(A_2)$, quaisquer que sejam as matrizes $A_1, A_2 \in M_n$.

Teorema 5.2. *Seja B o operador de emparelhamento definido na álgebra de Grassmann sobre $\mathbb{C}^2$ por* (18) *e*

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{2}|a_{11} + a_{22}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + \tfrac{1}{2}|(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}|, \\ N &= \tfrac{1}{2}|a_{11} + a_{22}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 - \tfrac{1}{2}|(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}|. \end{aligned}$$

Então $W(B)$ é o invólucro convexo dos pontos a_{11}, a_{22} e da elipse $\mathcal{E}_B$ (possivelmente degenerada) de focos em

$$\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}}$$

e de eixos maior e menor de comprimento $\sqrt{M}$ e $\sqrt{N}$, respectivamente.

Demonstração: A representação matricial de B na base $\{1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}$ da álgebra de Grassmann sobre $\mathbb{C}^2$ é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{12} \\ 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{11} + a_{22} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

que é unitariamente equivalente à soma directa $B_1 \oplus B_2$, onde

$$B_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{21} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pela invariância do contradomínio numérico perante transformações de semelhança unitária e pela propriedade relativa à soma directa, verifica-se que $W(B)$ é o invólucro convexo do conjunto $W(B_1) \cup W(B_2)$. Além disso, vale a igualdade $\mathrm{Tr}(B_2^* B_2) = |a_{11} + a_{22}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2$ e, dados os valores próprios β_1 e β_2 da matriz B_2, têm-se

$$\begin{aligned} 2|\beta_1^2| + 2|\beta_2|^2 &= |a_{11} + a_{22}|^2 + |(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}|, \\ 4\mathrm{Re}(\beta_1 \bar{\beta}_2) &= |a_{11} + a_{22}|^2 - |(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}|. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Contradomínio Elíptico, $W(B_2)$ é um disco elíptico (possivelmente degenerado), com β_1 e β_2 por focos, eixos maior e menor de comprimento $\sqrt{M}$ e $\sqrt{N}$, respectivamente. Assim, $W(B)$ é o invólucro convexo dos pontos a_{11}, a_{22} e da elipse $\mathcal{E}_B$ que constitui a fronteira do conjunto $W(B_2)$. ■

Em particular, o operador de emparelhamento fermiónico B definido por (18) admite um contradomínio numérico elíptico, cuja fronteira se reduz à elipse $\mathcal{E}_B$ descrita no Teorema 5.2, se os pontos a_{11} e a_{22} pertencem ao domínio delimitado pela curva $\mathcal{E}_B$.

Referências

[1] N. Bebiano, C. K. Li and J. da Providência, Some results on the numerical range of a derivation, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **14** (1993), 1084-1095.

[2] N. Bebiano e J. da Providência, Numerical ranges in physics, *Linear Multilin. Algebra* **43** (1998), 327-337.

[3] N. Bebiano, C.-K. Li e J. da Providência, Generalized numerical ranges of permanental compounds arising from quantum systems of bosons, *Electr. J. Linear Algebra* **7** (2000), 73-91.

[4] N. Bebiano, R. Lemos e J. da Providência, Numerical ranges of unbounded operators arising in quantum physics, *Linear Algebra Appl.* **381** (2004), 259-279.

[5] J. P. Blaizot e G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, MIT Press, Cambridge, 1986.

[6] E. Brown e I. Spitkovsky, On matrices with elliptical numerical ranges, *Linear Multilin. Algebra* **52** (2004), 177-193.

[7] M.-T. Chien, On the numerical range of tridiagonal operators, *Linear Algebra Appl.*, **246** (1996), 203-214.

[8] M.-T. Chien, The envelope of the generalized numerical range, *Linear Multilin. Algebra*, **43** (1998), 363-376.

[9] M.-T. Chien e H. Nakazato, Boundary generating curves of the c-numerical range, *Linear Algebra Appl.*, **294** (1999), 67-84.

[10] M.-T. Chien e H. Nakazato, The c-numerical range of tridiagonal matrices, *Linear Algebra Appl.*, **335** (2001), 55-61.

[11] M. Eiermann, Fields of values and iterative methods, *Linear Algebra Appl.* **180** (1993), 167-197.

[12] M. Fiedler, Geometry of the numerical range of matrices, *Linear Algebra Appl.* **37** (1981), 81-96.

[13] M. Goldberg e E. G. Straus, Elementary inclusion relations for generalized numerical ranges, *Linear Algebra Appl.* **18** (1977), 1-24.

[14] K. Gustafson and D. Rao, *Numerical Range - The field of values of linear operators and matrices*, Springer, New York, 1997.

[15] F. Hausdorff, Der Wertvorrat einer Bilinearform, *Math. Z.* **3** (1919), 314-316.

[16] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1991.

[17] D. Keeler, L. Rodman e I. Spitkovsky, The numerical range of 3×3 matrices, *Linear Algebra Appl.* **252** (1997), 115-139.

[18] R. Kippenhahn, Über den Wertvorrat einer Matrix, *Math. Nach.* **6** (1951), 193-228.

[19] F. D. Murnaghan, On the field of values of a square matrix *Proc. Nat. Acad. Sci.* **18** (1932), 246-248.

[20] H. Nakazato e K. Tsumura, k-Numerical range and the structural performance of buildings, *Sci. Math. Japonicae* **53** (2000), 101-117.

[21] H. Shapiro, A conjecture of Kippenhahn about the characteristic polynomial of a pencil generated by two Hermitian matrices. II, *Linear Algebra Appl.*, 45 (1982), 97-108.

[22] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, *Math. Z.* **2** (1918), 187-197.

[23] S.-H. Tso e P. Y. Wu, Matricial ranges of quadratic operators, *Rocky Mountain J. Math.* **29** (1999), 1139-1152.

[24] R. Westwick, A theorem on numerical range, *Linear Multilin. Algebra* **2** (1975), 311-315.

Generalizações da álgebra de Weyl–Hayashi e espectro primitivo de $U_q(\mathfrak{g}^+)$

Samuel A. Lopes[a]

[a]Centro de Matemática da Universidade do Porto, e-mail: slopes@fc.up.pt

Resumo

Seja $U_q(\mathfrak{g}^+)$ a deformação de Drinfeld–Jimbo da álgebra envolvente universal da álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}_{n+1}^+$, que aparece naturalmente como a parte positiva na decomposição triangular da álgebra de Lie simples $\mathfrak{sl}_{n+1}$ de tipo A_n. Assumindo que o corpo de base $\mathbb{K}$ é algébricamente fechado e de característica 0, e que o parâmetro $q \in \mathbb{K}^*$ não é raiz da unidade, definimos e estudamos certos quocientes de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ que coincidem com a álgebra de Hayashi quando $n = 2$ (ver [13], [2] e [12]). Mostramos que estes são domínios Noetherianos simples, de centro trivial e dimensão de Gelfand-Kirillov par. Propomo-los assim como análogos quânticos das álgebras de Weyl. Na segunda parte do artigo, estudamos o espectro primitivo de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ em detalhe, no espírito de [14]. Determinamos todos os ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, calculamos as suas alturas e construimos $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples correspondendo a cada um destes ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$.

Palavras-chave: álgebra de Lie nilpotente, álgebra de Weyl, grupo quântico, ideal primitivo.

1 Introdução

Nesta exposição estudaremos os ideais primitivos da álgebra envolvente universal quantizada $U_q(\mathfrak{g}^+)$ correspondente à álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}_{n+1}^+$ das matrizes estritamente triangular superiores de ordem $n+1$, dando especial atenção à álgebra $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$. No caso clássico, os factores primitivos da álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g}^+)$ de $\mathfrak{g}^+$ são isomorfos a álgebras de Weyl, e como tal os ideais primitivos de $U(\mathfrak{g}^+)$ são simplesmente os seus ideais maximais. Por exemplo, se $n = 2$ então $U(\mathfrak{sl}_3^+)$ admite geradores x, y, z, que satisfazem as relações:

$$xz = zx, \qquad yz = zy, \qquad xy - yx = z.$$

O centro de $U(\mathfrak{sl}_3^+)$ é a álgebra polinomial na variável central z, e $U(\mathfrak{sl}_3^+)/(z-1)$ é isomorfa à primeira álgebra de Weyl sobre o corpo de base. Aqui, o cenário quântico difere do clássico: conhecem-se ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ que não são maximais (ver [17], por exemplo), e portanto $U_q(\mathfrak{g}^+)$ tem, em geral, quocientes primitivos que não são simples.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo algébricamente fechado de característica 0 e tome-se um parâmetro $q \in \mathbb{K}^*$ que não seja raiz da unidade. Então, $U_q(\mathfrak{g}^+)$ é a $\mathbb{K}$-álgebra com geradores $e_1, \ldots, e_n$, sujeitos às relações de Serre quânticas:

$$\begin{aligned} e_ie_j - e_je_i &= 0 \qquad \text{se } |i-j| \neq 1, \\ e_i^2e_j - (q+q^{-1})e_ie_je_i + e_je_i^2 &= 0 \qquad \text{se } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

O centro de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ foi calculado por Alev e Dumas [1], e por Caldero [5, 6]. É uma álgebra polinomial sobre $\mathbb{K}$ nas variáveis centrais $z_1, \ldots, z_l$, onde $l = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Se $n = 2$ então $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ pode ser dada por geradores X, Y, Z, que satisfazem as seguintes relações:

$$ZX = q^{-1}XZ, \qquad ZY = qYZ, \qquad XY - q^{-1}YX = Z.$$

O centro de $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ é a álgebra polinomial na variável $z_1 = (XY - qYX)Z$.

Em [13], Kirkman e Small mostraram que $(z_1 - 1)$ é um ideal maximal de $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ e que a álgebra quociente $A_q = U_q(\mathfrak{sl}_3^+)/(z_1 - 1)$, apesar de não ser isomorfa à álgebra de Weyl $\mathbb{A}_1(\mathbb{K})$, partilha com esta várias propriedades: são ambas domínios Noetherianos simples, de centro trivial, dimensão de Gelfand-Kirillov 2 e dimensão de Krull 1. Na primeira parte da exposição, generalizaremos estes resultados de Kirkman e Small a $U_q(\mathfrak{g}^+)$, para todo o $n \geq 2$. Mais concretamente, mostraremos que $(z_1 - \alpha_1, \ldots, z_l - \alpha_l)$ é um ideal maximal de $U_q(\mathfrak{g}^+)$, para todo o $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}^*$, e concluiremos que a álgebra quociente correspondente é um domínio Noetheriano simples de centro trivial e dimensão de Gelfand-Kirillov par, embora não seja isomorfa a uma álgebra de Weyl sobre $\mathbb{K}$.

Na segunda parte da exposição, estudaremos os ideais primitivos à esquerda de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ bastante detalhadamente. De forma a fazermos uso da teoria de estratificação de Goodearl e Letzter [10], consideraremos a acção natural do torus $\mathcal{H} = (\mathbb{K}^*)^3$ em $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$. Relativamente a esta acção, o espectro primo de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ é particionado em $4! = 24$ estratos, dados na Proposição 4.1. Após uma análise da porção maximal de cada estrato, obteremos todos os ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, e calcularemos também as suas respectivas alturas, usando a catenariedade de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ e a fórmula da altura de Tauvel (ver [9]). Resultados análogos foram obtidos por Malliavin [17] para $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ e, recentemente, por Launois [14] para $U_q(\mathfrak{so}_5^+)$. Neste último caso, o autor conseguiu determinar o grupo dos automorfismos de álgebra de $U_q(\mathfrak{so}_5^+)$, usando resultados parciais de Andruskiewitsch e Dumas [3]. Uma consequência interessante deste estudo é que a dimensão de Gelfand-Kirillov dos quocientes primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ toma exactamente os valores 0, 2 e 4. Em particular, como acontece no caso clássico, esta dimensão é sempre par.

Finalmente, construiremos um $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-modulo simples de aniquilador P, para cada ideal primitivo P de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$. Isto, claramente, não esgota a lista de todos os $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-modulos simples, mas resolve o problema de decidir se um dado elemento pertence ou não a um dado ideal primitivo de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, e portanto facilita a tarefa de distinção entre os vários ideais primitivos desta álgebra.

2 Definições e notação

Trabalhamos sobre um corpo algébricamente fechado $\mathbb{K}$ de característica 0, e fixamos um parâmetro $q \in \mathbb{K}^*$ que supomos não ser uma raiz da unidade. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ a álgebra de Lie complexa e semisimples das matrizes de ordem $(n+1)$ e traço 0, e tomemos a sua subálgebra nilpotente maximal $\mathfrak{g}^+ = \mathfrak{sl}_{n+1}^+$ constituída pelas matrizes estritamente triangular superiores. Como é habitual, $[k] = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$ é a q-versão do inteiro $k \in \mathbb{Z}$.

2.1 A álgebra $U_q(\mathfrak{g}^+)$

A álgebra envolvente universal quantizada $U_q(\mathfrak{g}^+)$ é a $\mathbb{K}$-álgebra associativa e unitária dada pelos geradores de Chevalley $e_1, \dots, e_n$, sujeitos às relações de Serre quânticas:

$$e_i e_j - e_j e_i = 0 \qquad \text{se } |i-j| \neq 1, \tag{1}$$
$$e_i^2 e_j - (q+q^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0 \qquad \text{se } |i-j| = 1. \tag{2}$$

Sejam $Q = \mathbb{Z}^n$ o grupo abeliano livre de posto n e base canónica $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, e $Q^+ = \mathbb{N}^n$ o seu submonoide. Existe uma forma bilinear não degenerada em

$Q \times Q$ determinada por $(\alpha_i, \alpha_j) = 2, -1$ ou 0 conforme se tenha $i = j$, $|i-j| = 1$ ou $|i-j| > 1$, respectivamente. Em virtude da homogeneidade das relações de Serre quânticas, vê-se que $U_q(\mathfrak{g}^+)$ admite uma graduação por Q^+ em que o gerador e_i tem grau α_i. Usaremos a terminologia *peso* em vez de grau para esta graduação, e escreveremos $wt(u) = \beta$ se $u \in U_q(\mathfrak{g}^+)$ tiver peso $\beta \in Q^+$.

2.2 Base de tipo PBW

Como foi feito em [18, App. 2], definimos recursivamente elementos de peso X_{ij}, $1 \leq i < j \leq n+1$, fazendo $X_{i,i+1} = e_i$ e $X_{ij} = X_{ik}X_{kj} - q^{-1}X_{kj}X_{ik}$, para $1 \leq i < k < j \leq n+1$ (isto não depende da escolha de k). Note-se que $wt(X_{ij}) = \alpha_i + \cdots + \alpha_{j-1}$, para $i < j$. O conjunto $\{X_{ij}\}$ é munido da seguinte ordem total:

$$X_{ij} < X_{kl} \quad \Longleftrightarrow \quad (k < i) \quad \text{ou} \quad (k = i \quad \text{e} \quad l < j);$$

denotaremos também o k-ésimo elemento desta cadeia crescente por X_k, de forma a que $\{X_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n+1} = \{X_k\}_{1 \leq k \leq m}$, onde $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. Também usaremos a notação seguinte: $X^{\mathbf{b}} = X_1^{b_1} \cdots X_m^{b_m}$, para $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{N}^m$.

Os resultados de Ringel que se seguem são bem conhecidos.

Teorema 2.1 ([18, Thm. 2, Cor.])**.**

(a) *A álgebra $U_q(\mathfrak{g}^+)$ é uma extensão de Ore iterada do tipo*

$$\mathbb{K}[X_1][X_2; \tau_2, \delta_2] \cdots [X_m; \tau_m, \delta_m],$$

onde τ_j é um automorfismo de álgebra e δ_j é uma τ_j-derivação $\mathbb{K}$-linear;

(b) *Os monómios $\{X^{\mathbf{b}} \mid \mathbf{b} \in \mathbb{N}^m\}$ formam uma base de $U_q(\mathfrak{g}^+)$, e para $i < j$ tem-se*

$$X_jX_i = q^{v_{ji}}X_iX_j + r,$$

onde $v_{ji} = (wt(X_i), wt(X_j))$ e r é uma combinação linear de monómios em $X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}$;

(c) Os ideais primos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ são completamente primos.

2.3 O grau de um elemento de $U_q(\mathfrak{g}^+)$

Definimos uma relação de ordem em $\mathbb{N}^m$ por $\mathbf{b} < \mathbf{c} \iff$ existe $1 \leq k \leq m$ tal que $b_k < c_k$ e $b_t = c_t$ para todo o $t > k$. Em conjunção com o Teorema 2.1(b), esta relação de ordem determina uma filtração crescente $\{\mathcal{F}_{\mathbf{a}}\}_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m}$ de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ dada por

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a}} = \bigoplus_{\mathbf{b} \leq \mathbf{a}} \mathbb{K}.X^{\mathbf{b}},$$

e a álgebra graduada que lhe corresponde é o espaço afim quântico de geradores $\theta_1, \ldots, \theta_m$ e relações $\theta_j\theta_i = q^{v_{ji}}\theta_i\theta_j$, sempre que $i < j$, onde $\theta_i = gr\, X_i$ e $v_{ji} = (wt(X_i), wt(X_j))$.

Dado $u \in U_q(\mathfrak{g}^+)$, pomos $deg(u) = \mathbf{a} \in \mathbb{N}^m$ se $u \neq 0$ e $\mathbf{a}$ for o único elemento de $\mathbb{N}^m$ que satisfaz $u \in \mathcal{F}_{\mathbf{a}}$ e $u \notin \mathcal{F}_{\mathbf{b}}$ para todo o $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. Dizemos então que u tem grau $\mathbf{a}$. Note-se que $deg(uv) = deg(u) + deg(v)$ para todos os elementos $u, v \in U_q(\mathfrak{g}^+)$ não nulos.

2.4 Elementos normais de $U_q(\mathfrak{g}^+)$

De acordo com o trabalho de Alev e Dumas [1], e também de Caldero [6, 7], existem elementos de peso $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ em $U_q(\mathfrak{g}^+)$ tais que o seguinte teorema é válido.

Teorema 2.2 ([6, 7])**.** *Dados $1 \leq i, j \leq n$, tem-se:*

(a) $e_i\Delta_j = q^{\delta_{ij} - \delta_{i,n+1-j}}\Delta_j e_i$;

(b) *A subálgebra de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ gerada pelos Δ_i é uma álgebra polinomial (comutativa) $\mathbb{K}[\Delta_1, \ldots, \Delta_n]$ em n variáveis;*

(c) *O centro $Z_q(\mathfrak{g}^+)$ de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ é a álgebra polinomial nas variáveis $\{\Delta_k\Delta_{n+1-k} \mid 1 \leq k \leq n/2\}$ se n é par e $\{\Delta_k\Delta_{n+1-k} \mid 1 \leq k \leq (n-1)/2\} \cup \{\Delta_{(n+1)/2}\}$ se n é ímpar.*

Foi observado em [15, 4.4] que

$$gr(\Delta_i) = gr(X_{i,n+1})\, gr(X_{i-1,n}) \cdots gr(X_{2,n+3-i})\, gr(X_{1,n+2-i}), \tag{3}$$

na álgebra graduada introduzida em 2.3.

Fixemos um pouco mais de notação. O centro de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ será denotado por $Z_q(\mathfrak{g}^+)$ e $l = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Os elementos $z_1, \ldots, z_l$ são definidos por

$$z_i = \begin{cases} \Delta_i\Delta_{n+1-i} & \text{se} \quad i < l, \\ \Delta_l\Delta_{l+1} & \text{se} \quad i = l \text{ e } n \text{ é par}, \\ \Delta_l & \text{se} \quad i = l \text{ e } n \text{ é ímpar}, \end{cases}$$

de tal modo que $Z_q(\mathfrak{g}^+) = \mathbb{K}[z_1, \ldots, z_l]$. O inteiro m é o número de raízes positivas da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_{n+1}$, isto é, $m = \frac{1}{2}n(n+1)$.

2.5 Os ideais primos e primitivos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$

Neste breve parágrafo sintetizaremos a porção da teoria de estratificação desenvolvida por Goodearl e Letzter que é relevante para o nosso estudo. O leitor deverá consultar [10] para obter os detalhes, as provas, e uma explicação da terminologia usada. Consideraremos apenas os ideais primitivos à esquerda; em virtude do antiautomorfismo $e_i \mapsto e_i$ de $U_q(\mathfrak{g}^+)$, esta restrição não é de relevo.

Seja $\mathcal{H}$ o n-torus $(\mathbb{K}^*)^n$. Para cada $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{H}$ existe um automorfismo $\sigma_{\bar{\lambda}}$ de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ dado por $\sigma_{\bar{\lambda}}(e_i) = \lambda_i e_i$, para $1 \leq i \leq n$. Isto define uma acção racional de $\mathcal{H}$ em $U_q(\mathfrak{g}^+)$ tal que a graduação de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ induzida pelo grupo de caracteres de $\mathcal{H}$ coincide com a decomposição em espaços de peso de 2.1 (identificando a i-ésima projecção $\bar{\lambda} \mapsto \lambda_i$ com a raiz simples α_i). Como $\mathcal{H}$ age por automorfismos, a acção passa aos espaços $\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$ e $\operatorname{Prim} U_q(\mathfrak{g}^+)$ dos ideais primos e primitivos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$, respectivamente, munidos da topologia de Jacobson. Seja $\mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+) \subseteq \operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$ o subespaço dos ideais primos $\mathcal{H}$-invariantes, ou seja, $\mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$ consiste nos ideais primos J de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ que são gerados por elementos de peso de $U_q(\mathfrak{g}^+)$. Por [10, Prop. 4.2] e pelo Teorema 2.1, $\mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$ é um conjunto finito que consiste nos ideais da forma $(P : \mathcal{H}) := \bigcap_{h\in\mathcal{H}} h.P$, para $P \in \operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$.

Isto determina uma decomposição de $\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$ em $\mathcal{H}$-estratos:

$$\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+) = \bigcup_{J\in\mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)} \operatorname{Spec}_J U_q(\mathfrak{g}^+),$$

onde $\operatorname{Spec}_J U_q(\mathfrak{g}^+) = \{P \in \operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+) \mid (P : \mathcal{H}) = J\}$ é o $\mathcal{H}$-estrato de J em $\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$, e análogamente para $\operatorname{Prim} U_q(\mathfrak{g}^+)$. Em virtude de [10, Thm. 4.4], segue que os ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ são os elementos maximais de $\operatorname{Spec}_J U_q(\mathfrak{g}^+)$, para cada $J \in \mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$. Mais, uma vez que $\mathbb{K}$ é algébricamente fechado, [10, Thm. 2.6 ou Thm. 6.8] implicam que $\mathcal{H}$ age transitivamente em cada um dos conjuntos $\operatorname{Prim}_J U_q(\mathfrak{g}^+)$. Logo, as $\mathcal{H}$-órbitas de ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ são parametrizadas pelos elementos do conjunto $\mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$, que tem cardinalidade $(n+1)!$ por resultados de Gorelik [11, Prop. 5.3.3] (ver também [3, 3.4.1]).

Dado $J \in \mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$, seja Ξ_J o conjunto dos elementos de peso não nulos de $U_q(\mathfrak{g}^+)/J$, relativamente à Q^+-graduação induzida de $U_q(\mathfrak{g}^+)$. O seguinte resultado de Goodearl e Letzter descreve os $\mathcal{H}$-estratos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$.

Teorema 2.3 ([10, Thm. 6.6])**.** *Sejam J, Ξ_J e $\operatorname{Spec}_J U_q(\mathfrak{g}^+)$ como acima. Então Ξ_J é um conjunto de Ore em $U_q(\mathfrak{g}^+)/J$. Denotando a localização de $U_q(\mathfrak{g}^+)/J$ relativamente a Ξ_J por $U_q(\mathfrak{g}^+)_J$, tem-se:*

(a) *A localização $U_q(\mathfrak{g}^+) \to U_q(\mathfrak{g}^+)/J \to U_q(\mathfrak{g}^+)_J$ induz um homeomorfismo entre $\operatorname{Spec}_J U_q(\mathfrak{g}^+)$ e $\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)_J$.*

(b) *A contracção e a extensão induzem homeomorfismos inversos entre $\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)_J$ e $\operatorname{Spec} Z(U_q(\mathfrak{g}^+)_J)$, onde $Z(U_q(\mathfrak{g}^+)_J)$ denota o centro de $U_q(\mathfrak{g}^+)_J$.*

3 Generalizações da álgebra de Weyl–Hayashi

Se fizermos $n = 2$, temos que $Z_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ é uma álgebra polinomial na variável central z_1. A álgebra quociente $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)/(z_1 - 1)$ foi introduzida por Hayashi em [12], em conexão com certas representações das álgebras envolventes universais quantizadas das álgebras de Lie semisimples de tipos A e C. Em [13], Kirkman e Small mostraram que $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)/(z_1 - 1)$ é um domínio Noetheriano simples com dimensão de Gelfand-Kirillov 2, mas que no entanto não é isomorfa à álgebra de Weyl $\mathbb{A}_1(\mathbb{K})$ (ver também [2] e [17]). A relevância deste resultado é que os factores primitivos da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo de característica 0 são sempre isomorfos a álgebras de Weyl sobre o corpo de base (ver [8, Thm. 4.7.9]). Em particular, os factores primos que têm dimensão de Gelfand-Kirillov 2 são necessáriamente isomorfos a $\mathbb{A}_1(\mathbb{K})$. Nesta secção, generalizaremos este resultado de Kirkman e Small a $U_q(\mathfrak{g}^+)$, de forma a propor novos análogos quânticos das álgebras de Weyl $\mathbb{A}_k(\mathbb{K})$.

3.1 Bases de Gröbner

Começemos por introduzir algumas técnicas básicas da teoria das bases de Gröbner. O leitor interessado em obter mais detalhes deverá consultar [4]. Recordemos a filtração, a álgebra graduada associada e a noção de grau dadas em 2.3 em função da base de tipo PBW de $U_q(\mathfrak{g}^+)$. Dado um subconjunto F de $U_q(\mathfrak{g}^+)$, pomos $deg(F) = \{deg(f) \mid 0 \neq f \in F\} \subseteq \mathbb{N}^m$. Claramente, se L é um ideal à esquerda, à direita ou bilateral de $U_q(\mathfrak{g}^+)$, então $deg(L)$ é estável para translacções por elementos de $\mathbb{N}^m$; por outras palavras, $deg(L)$ é um *monoideal* de $\mathbb{N}^m$. O conjunto $\{f_1, \ldots, f_s\} \subseteq L$ diz-se uma *base de Gröbner* de L se (ver [4, Def. 2.8])

$$deg(L) = \bigcup_{j=1}^{s} \left(deg(f_j) + \mathbb{N}^m\right).$$

Recordemo-nos também que o centro de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ é denotado por $Z_q(\mathfrak{g}^+) = \mathbb{K}[z_1, \ldots, z_l]$. Dado $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_l) \in \mathbb{K}^l$, pomos $f_j^{\mathbf{t}} = z_j - t_j$ e $I^{\mathbf{t}} = \sum_{j=1}^{l} U_q(\mathfrak{g}^+) f_j^{\mathbf{t}}$.

Proposição 3.1. *O conjunto* $\{f_1^{\mathbf{t}}, \ldots, f_l^{\mathbf{t}}\}$ *é uma base de Gröbner do ideal* $I^{\mathbf{t}}$.

Dado $0 \neq f \in U_q(\mathfrak{g}^+)$, escrevemos $f = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m} c_{\mathbf{a}} X^{\mathbf{a}}$, onde $c_{\mathbf{a}} \in \mathbb{K}$ e a soma é finita. Definimos $\mathcal{N}(f) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^m \mid c_{\mathbf{a}} \neq 0\}$. Usamos o algoritmo de divisão desenvolvido em [4, Thm. 2.1] para provar o próximo resultado.

Corolário 3.2. *Para todo o* $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^l$*, o ideal* $I^{\mathbf{t}}$ *de* $U_q(\mathfrak{g}^+)$ *é semiprimo.*

3.2 O $\mathcal{H}$-estrato de (0)

Queremos descrever o espaço dos ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})^+$ que não contêm elementos de peso não nulos, isto é, $\mathrm{Prim}_{(0)} U_q(\mathfrak{g}^+)$. Por [10, Thm. 4.4] e pelo Teorema 2.3, este espaço é homeomorfo ao espaço dos ideais maximais de $Z(\mathcal{Q})$, onde $\mathcal{Q}$ é a localização de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ no conjunto de Ore $\Xi_{(0)}$ dos elementos de peso não nulos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$, e $Z(\mathcal{Q})$ é o centro de $\mathcal{Q}$.

Lema 3.3. *O centro de $\mathcal{Q}$ é a álgebra dos polinómios de Laurent*

$$Z(\mathcal{Q}) = \mathbb{K}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_l^{\pm 1}].$$

Pelo lema anterior, os ideais maximais de $Z(\mathcal{Q})$ são os ideais da forma

$$\sum_{j=1}^{l} Z(\mathcal{Q})\,(z_j - t_j)\,, \qquad \text{para } \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_l) \in (\mathbb{K}^*)^l. \tag{4}$$

Fixemos $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^l$. O ideal (4) corresponde ao ideal maximal $\sum_{j=1}^{l} \mathcal{Q}\,(z_j - t_j)$ de $\mathcal{Q}$, por extensão (ver o Teorema 2.3(b)), e este último corresponde ao ideal

$$T^{\mathbf{t}} := \Big(\sum_{j=1}^{l} \mathcal{Q}\,(z_j - t_j)\Big) \bigcap U_q(\mathfrak{g}^+) \tag{5}$$

de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ por via do homeomorfismo do Teorema 2.3(a), com $J = (0)$. Logo, $T^{\mathbf{t}}$ é maximal no $\mathcal{H}$-estrato de (0) em $\mathrm{Spec}\, U_q(\mathfrak{g}^+)$, e por [10, Thm. 4.4], $T^{\mathbf{t}}$ é um ideal primitivo de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ que não contém elementos de peso não nulos. Além disso, por construção, todo o ideal primitivo de $U_q(\mathfrak{g}^+)$ com esta propriedade é da forma $T^{\mathbf{t}'}$, para algum $\mathbf{t}' \in (\mathbb{K}^*)^l$.

Recordemos a definição de $I^{\mathbf{t}}$ dada em 3.1. A próxima proposição dá ao ideal $T^{\mathbf{t}}$ uma forma mais familiar.

Proposição 3.4. *Seja $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^l$. Então o ideal $I^{\mathbf{t}}$ é primitivo. De facto,*

$$T^{\mathbf{t}} = I^{\mathbf{t}} = \sum_{j=1}^{l} U_q(\mathfrak{g}^+)\,(z_j - t_j)\,.$$

Fazemos notar que a hipótese $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^l$ da Proposition 3.4 é essencial. Se, por exemplo, $t_1 = 0$ e $n \geq 2$, então $I^{\mathbf{t}}$ não é sequer um ideal primo (apesar de ser semiprimo, pelo Corolário 3.2), uma vez que $\Delta_1 \Delta_n = z_1 \in I^{\mathbf{t}}$, e no entanto nem Δ_1 nem Δ_n pertencem a $I^{\mathbf{t}}$, pela Proposição 3.1. A única excepção possível a este tipo de contra-exemplo seria ter $t_l = 0$ e n ímpar, pois neste caso $z_l = \Delta_l$; não estudámos aqui esta situação.

Teorema 3.5. *Suponhamos que $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^l$. Então $I^{\mathbf{t}}$ é um ideal maximal de $U_q(\mathfrak{g}^+)$. É também minimal entre os ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{g}^+)$.*

3.3 Dimensão de Gelfand-Kirillov de $U_q(\mathfrak{g}^+)/I^{\mathbf{t}}$

É agora simples calcular a dimensão de Gelfand-Kirillov (GKdim) da álgebra quociente $U_q(\mathfrak{g}^+)/I^{\mathbf{t}}$. Podemos, por exemplo, usar a Proposição 3.1 e as técnicas de [4, Sec. 4], como fizémos em [16, 5.2.3]. Uma outra abordagem é baseada em [9, Thm. 4.8], onde os autores mostram que $U_q(\mathfrak{g}^+)$ é catenária e que a formula da altura de Tauvel é válida em $U_q(\mathfrak{g}^+)$. Por esta última propriedade, dado $P \in \operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{g}^+)$,

$$\operatorname{GKdim}(U_q(\mathfrak{g}^+)/P) = \operatorname{GKdim}(U_q(\mathfrak{g}^+)) - \operatorname{altura}(P) = m - \operatorname{altura}(P). \qquad (6)$$

Se $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^l$ e $J \subseteq I^{\mathbf{t}}$ for um ideal primo, então claramente $J \in \operatorname{Spec}_{(0)} U_q(\mathfrak{g}^+)$. Como os espaços $\operatorname{Spec}_{(0)} U_q(\mathfrak{g}^+)$ e $\operatorname{Spec} Z(\mathcal{Q})$ são homeomorfos, segue que a altura de $I^{\mathbf{t}}$ coincide com a altura do ideal maximal correspondente (4) de $Z(\mathcal{Q})$, que é l pelo Lema 3.3. Logo, (6) implica que $\operatorname{GKdim}(U_q(\mathfrak{g}^+)/I^{\mathbf{t}}) = m - l$ para $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^l$, resultado que é válido mais geralmente para todo o $\mathbf{t} \in \mathbb{K}^l$, como foi já provado em [16, 5.2.3].

Corolário 3.6. *Tome-se $\mathbf{t} \in (\mathbb{K}^*)^l$. A álgebra quociente $U_q(\mathfrak{g}^+)/I^{\mathbf{t}}$ é um domínio Noetheriano simples de centro $\mathbb{K}$ e dimensão de Gelfand-Kirillov igual a $m - l = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$. Em particular, a dimensão de Gelfand-Kirillov de $U_q(\mathfrak{g}^+)/I^{\mathbf{t}}$ é sempre par. No entanto, $U_q(\mathfrak{g}^+)/I^{\mathbf{t}}$ não é isomorfa a nenhuma álgebra de Weyl do tipo $A_k(\mathbb{K})$, qualquer que seja o $k \geq 1$.*

4 Os ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$

Nesta secção estudaremos o espectro primitivo de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ em detalhe. Um estudo semelhante foi feito para $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ em [17], e para $U_q(\mathfrak{so}_5^+)$ em [14]. Começaremos por determinar o conjunto $\mathcal{H}\text{-}\operatorname{Spec} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ de todos os ideais (completamente) primos e $\mathcal{H}$-invariantes de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$. Este é um conjunto finito de cardinalidade $4! = 24$ cujos elementos parametrizam as $\mathcal{H}$-orbitas de ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, pela teoria de estratificação de Goodearl e Letzter [10] e também por resultados de Gorelik [11]. De seguida, descreveremos explicitamente cada $\mathcal{H}$-estrato em $\operatorname{Prim} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, calcularemos a altura de todos os ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, e daremos um exemplo de um $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo de aniquilador P, para cada $P \in \operatorname{Prim} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$. Uma consequência interessante desta análise é que os quocientes primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ têm todos dimensão de Gelfand-Kirillov par, como acontece no caso clássico.

4.1 A estrutura da álgebra $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$

Uma base de tipo PBW de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, cujas propriedades vimos em 2.2, é dada por

$$X_1 = e_3, \qquad X_2 = e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2, \qquad X_3 = e_2,$$

$$X_4 = e_1X_2 - q^{-1}X_2e_1, \qquad X_5 = e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, \qquad X_6 = e_1,$$

e podemos tomar

$$\Delta_1 = X_4, \qquad \Delta_2 = X_2X_5 - q^{-1}X_3X_4,$$

$$\Delta_3 = q^{-2}\Big((q-q^{-1})^2X_1X_3X_6 - (q-q^{-1})X_1X_5 - (q-q^{-1})X_2X_6 + X_4\Big),$$

$$z_1 = \Delta_1\Delta_3, \qquad z_2 = \Delta_2,$$

de tal modo que $Z_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \mathbb{K}[z_1, z_2]$.

Consideremos também o *automorfismo de diagrama* η de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, onde $\eta(e_i) = e_{4-i}$ para $i = 1, 2, 3$. O elemento Δ_3 acima foi definido de forma a termos $\eta(\Delta_1) = \Delta_3$.

4.2 $\mathcal{H}$-Spec $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$

Em [16, 5.3.3], usámos as ideias de Goodearl e Letzter para provar a Proposição 4.1 abaixo; mais precisamente, usámos [10, Lem. 3.2] e as provas de [10, Lem. 3.3, Prop. 3.4]. Como é conhecido que $|\mathcal{H}\text{-Spec}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+)| = 4!$, uma outra abordagem à prova deste resultado seria mostrar que os ideais que listamos são ideais primos distintos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, sendo que são claramente $\mathcal{H}$-invariantes. Note-se que o automorfismo η definido em 4.1 age em $\mathcal{H}$-Spec $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ e cada η-orbita tem um ou dois elementos, já que $\eta^2 = 1$.

Proposição 4.1. *O espaço $\mathcal{H}$-Spec $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ consiste nos $4! = 24$ ideais listados abaixo, onde foram agrupados os ideais que estão na mesma η-orbita:*

1. (0);
2. (Δ_2);
3. $(\Delta_1), \quad (\Delta_3)$;
4. (Δ_1, Δ_3);
5. $(e_1e_2 - qe_2e_1), \quad (e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2)$;
6. $(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1), \quad (e_2e_3 - qe_3e_2)$;
7. $(e_1), \quad (e_3)$;

8. $(e_1e_2 - qe_2e_1, e_2e_3 - qe_3e_2)$, $(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2)$;
9. $(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, e_2e_3 - qe_3e_2)$;
10. $(e_1e_2 - qe_2e_1, e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2)$;
11. $(e_2e_3 - qe_3e_2, e_1)$, $(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, e_3)$;
12. $(e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2, e_1)$, $(e_1e_2 - qe_2e_1, e_3)$;
13. (e_1, e_2), (e_2, e_3);
14. (e_2);
15. (e_1, e_3);
16. (e_1, e_2, e_3).

4.3 O espaço $\mathrm{Prim}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$

Podemos finalmente determinar os ideais primitivos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ e calcular as suas alturas, estudando os estratos $\mathrm{Prim}_J\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, para todas as escolhas possíveis de $J \in \mathcal{H}\text{-Spec}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$. Denotamos os ideais dados na Proposição 4.1 por J_i, $J_{i,a}$ ou $J_{i,b}$ de acordo com a sua posição nessa lista, de modo que $J_{13,a} = (e_1, e_2)$, $J_{13,b} = (e_2, e_3)$ e $J_{14} = (e_2)$, por exemplo. Dado um $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-modulo M, denotamos o seu aniquilador por $\mathrm{ann}\, M$.

Sabemos de [1] que o centro de $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ é a álgebra polinomial no elemento de Casimir quântico

$$\Omega = (\dot{e}_1\dot{e}_2 - q^{-1}\dot{e}_2\dot{e}_1)(\dot{e}_1\dot{e}_2 - q\dot{e}_2\dot{e}_1) \in U_q(\mathfrak{sl}_3^+), \tag{7}$$

onde $\dot{e}_1$ and $\dot{e}_2$ denotam os geradores de Chevalley de $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$. Para $i = 1, 2$ seja S_i a subálgebra de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ gerada por e_i e e_{i+1}. Então $S_i \simeq U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ e portanto o centro de S_i é a álgebra polinomial $\mathbb{K}[\Omega_i]$ na variável

$$\Omega_i = (e_ie_{i+1} - q^{-1}e_{i+1}e_i)(e_ie_{i+1} - qe_{i+1}e_i). \tag{8}$$

4.3.1 Aniquiladores de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples de dimensão finita: os $\mathcal{H}$-estratos de (e_2), (e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3) e (e_1, e_2, e_3)

Como consequência do facto de os ideais primos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ serem completamente primos, e dado que o corpo $\mathbb{K}$ é algébricamente fechado, pode mostrar-se que os $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples de dimensão finita têm dimensão 1. Seja $V = \mathbb{K}v_0$ um tal módulo. Existem escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$, com $\alpha_2 = 0$, ou $\alpha_2 \neq 0$ e $\alpha_1 = 0 = \alpha_3$, que satisfazem $e_i.v_0 = \alpha_i v_0$, para $i = 1, 2, 3$ (as referidas condições nos escalares

α_i são consequência directa das relações de Serre quânticas (2)). Assim, os ideais primos que ocorrem como aniquiladores de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples de dimensão finita são os ideais maximais da forma $(e_1 - \alpha_1, e_2 - \alpha_2, e_3 - \alpha_3)$, onde os α_i são como acima; estes pertencem a um dos seguintes $\mathcal{H}$-estratos: (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_1, e_3), (e_2).

Proposição 4.2. (a) $\mathrm{Prim}_{(e_1,e_2,e_3)}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1, e_2, e_3)\}$;

(b) $\mathrm{Prim}_{(e_1,e_2)}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1, e_2, e_3 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$;

(c) $\mathrm{Prim}_{(e_2,e_3)}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1 - \alpha, e_2, e_3) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$;

(d) $\mathrm{Prim}_{(e_1,e_3)}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1, e_2 - \alpha, e_3) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$;

(e) $\mathrm{Prim}_{(e_2)}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1 - \alpha, e_2, e_3 - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*\}$.

Os ideais primitivos descritos acima têm altura 6.

4.3.2 O $\mathcal{H}$-estrato de (0)

Proposição 4.3. *Sejam z_1 e z_2 os geradores do centro de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, conforme foram definidos em 4.1. Então,*

$$\mathrm{Prim}_{(0)}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(z_1 - \alpha, z_2 - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*\}$$

e estes ideais primitivos têm altura 2.

Em [15, 6.3] definimos $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos $M_{(\alpha,\beta)}$, para $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, e mostrámos que estes eram não isomorfos dois a dois, e simples sempre que $\alpha \neq 0$. Foi também visto que $(z_1 - \alpha^2, z_2 - \beta) \subseteq \mathrm{ann}\, M_{(\alpha,\beta)}$. Em particular, se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$ e α' é raiz quadrada de α em $\mathbb{K}$, então

$$\mathrm{ann}\, M_{(\alpha',\beta)} = (z_1 - \alpha, z_2 - \beta), \tag{9}$$

uma vez que o ideal da direita em (9) é maximal.

4.3.3 O $\mathcal{H}$-estrato de (Δ_2)

Considere-se a acção de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ no espaço vectorial $A = \mathbb{K}[x, y]$ dos polinómios nas variáveis x e y, dada pelas fórmulas $(a, b \geq 0)$:

$$\begin{aligned} e_1.x^a y^b &= [a] x^{a-1} y^b, \\ e_2.x^a y^b &= x^{a+1} y^{b+1}, \\ e_3.x^a y^b &= [b] x^a y^{b-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

onde $e_1.y^b = 0 = e_3 x^a$.

Lema 4.4. *As fórmulas (10) acima munem A de uma estrutura de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo simples, com $\operatorname{ann} A \in \operatorname{Prim}_{(\Delta_2)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$. Tem-se também $z_1 - q^{-2} \in \operatorname{ann} A$.*

Proposição 4.5. *Seja $P = \operatorname{ann} A$. Então,*

$$\operatorname{Prim}_{(\Delta_2)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{\sigma_{\bar{\lambda}}(P) \mid \bar{\lambda} \in (\mathbb{K}^*)^3\} \tag{11}$$

e estes ideais primitivos têm altura 2.

A tarefa de encontrar um $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo simples com aniquilador dado $Q \in \operatorname{Prim}_{(\Delta_2)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ dado é agora trivial: se $Q = \sigma_{\bar{\lambda}}(P)$, então Q é o aniquilador do módulo simples obtido de A e do automorfismo $\sigma_{\bar{\lambda}}^{-1} = \sigma_{\bar{\lambda}^{-1}}$, por torção.

4.3.4 Os $\mathcal{H}$-estratos de (Δ_1) e (Δ_3)

Considere-se o $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo $P_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \mathbb{K}[x, y^{\pm 1}]$, construído em [15, 6.3] em função dos parâmetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$. Tomando $\alpha = 0, \beta = 1$ e $\gamma = q^{-1}$, obtemos as seguintes fórmulas para a acção de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ em $P_{(0,1,q^{-1})}$:

$$e_1.x^a y^b = \begin{cases} q^{-(a+b)}(x^a y^b + [a]x^{a-1}y^{b-1}) & \text{se } b \geq 1 \\ q^{-(a+b)}x^a y^b + [a]x^{a-1}y^{b-1} & \text{se } b \leq 0, \end{cases}$$

$$e_2.x^a y^b = \begin{cases} q^b x^{a+1} y^b & \text{se } b \geq 0 \\ x^{a+1} y^b & \text{se } b \leq 0, \end{cases}$$

$$e_3.x^a y^b = \begin{cases} -q^{a-b}[a]x^{a-1}y^{b+1} & \text{se } b \geq 0 \\ -[a]x^{a-1}y^{b+1} & \text{se } b \leq -1. \end{cases}$$

Lema 4.6. *O módulo $P_{(0,1,q^{-1})}$ é simples e $P \in \operatorname{Prim}_{(\Delta_1)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, onde $P = \operatorname{ann} P_{(0,1,q^{-1})}$.*

Seja $Q_{(0,1,q^{-1})}$ o $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo obtido de $P_{(0,1,q^{-1})}$ por torção pelo automorfismo de diagrama η de 4.1. Note-se que se $P_{(0,1,q^{-1})}$ é dado pela representação ρ, então $Q_{(0,1,q^{-1})}$ é definido pela representação $\rho \circ \eta$. O lema que se segue é uma consequência imediata do Lema 4.6.

Lema 4.7. *O módulo $Q_{(0,1,q^{-1})}$ é simples e $Q \in \operatorname{Prim}_{(\Delta_3)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, onde $Q = \operatorname{ann} Q_{(0,1,q^{-1})}$.*

Proposição 4.8. *Sejam $P = \operatorname{ann} P_{(0,1,q^{-1})}$ e $Q = \operatorname{ann} Q_{(0,1,q^{-1})}$. Então*

(a) $\operatorname{Prim}_{(\Delta_1)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{\sigma_{\bar{\lambda}}(P) \mid \bar{\lambda} \in (\mathbb{K}^*)^3\}$,

(b) $\operatorname{Prim}_{(\Delta_3)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{\sigma_{\bar{\lambda}}(Q) \mid \bar{\lambda} \in (\mathbb{K}^*)^3\}$,

e estes ideais primitivos têm altura 2.

4.3.5 O $\mathcal{H}$-estrato de (Δ_1, Δ_3)

Seja $B = \mathbb{K}[t]$ o espaço vectorial dos polinómios na variável t. Fácilmente se verifica que as fórmulas

$$\begin{aligned} e_1.t^k &= [k]t^{k-1}, \\ e_2.t^k &= t^{k+1}, \\ e_3.t^k &= [k]t^{k-1}, \end{aligned}$$

definem uma acção de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ em B. Seja $P = \operatorname{ann} B$.

Lema 4.9. *Munido da acção descrita acima, B é um $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo simples e $P \in \operatorname{Prim}_{(\Delta_1,\Delta_3)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$.*

Recordemos o elemento de Casimir quântico $\Omega \in U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ e os elementos Ω_i, $i = 1, 2$, de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ definidos em 4.3. Seja $P' = (\Delta_1, \Delta_3, e_1 - e_3, \Omega_1 - 1)$. Após alguns cálculos rotineiros verifica-se que

$$e_1 - e_3, \Omega_1 - 1 \in P = \operatorname{ann} B,$$

e portanto $P' \subseteq P$.

Lema 4.10. *Seja P' como acima. Então,*

$$U_q(\mathfrak{sl}_3^+)/(\Omega - 1) \simeq U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/P', \tag{12}$$

e $P = P'$.

Proposição 4.11. *O $\mathcal{H}$-estrato de (Δ_1, Δ_3) em $\operatorname{Prim} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ é*

$$\operatorname{Prim}_{(\Delta_1,\Delta_3)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(\Delta_1, \Delta_3, e_1 - \alpha e_3, \Omega_1 - \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{K}^*\},$$

e estes ideais primitivos têm altura 4.

4.3.6 Os $\mathcal{H}$-estratos de $(e_1e_2 - q^{\pm 1}e_2e_1)$ e $(e_2e_3 - q^{\pm 1}e_3e_2)$

Consideraremos apenas o $\mathcal{H}$-estrato de $J_{5,b} = (e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2)$ em detalhe, uma vez que os restantes casos dos $\mathcal{H}$-estratos de $J_{5,a}$, $J_{6,a}$ e $J_{6,b}$ são semelhantes. A álgebra quociente $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{5,b}$ é isomorfa a $R := S_1[Y;\nu]$, onde ν é o automorfismo de álgebra de S_1 dado por $\nu(e_1) = e_1$ e $\nu(e_2) = qe_2$. De facto, existe um automorfismo de álgebra sobrejectivo $\phi : U_q(\mathfrak{sl}_4^+) \to R$ tal que $\phi(e_i) = e_i$, $i = 1, 2$ e $\phi(e_3) = Y$. Como $e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2 \in \ker \phi$, ϕ induz uma aplicação sobrejectiva, que ainda denotamos por ϕ, $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{5,b} \to R$. A aplicação natural $S_1 \to U_q(\mathfrak{sl}_4^+) \to U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{5,b}$ estende-se a um automorfismo de álgebra $\psi : R \to U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{5,b}$ tal que $\psi(Y) = e_3 + J_{5,b}$, pela propriedade universal das extensões de Ore. Os homomorfismos ϕ e ψ acabados de definir são inversos recíprocos; em particular, $\phi : U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{5,b} \to R$ é um isomorfismo.

A álgebra R é Q^+-graduada de forma a que ϕ se torne num isomorfismo de álgebras graduadas. Logo, os espaços $\operatorname{Spec}_{J_{5,b}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ e $\operatorname{Spec}_{(0)} R$ podem identificar-se via ϕ.

Lema 4.12. *O ideal $J_{5,b}$ de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ é primitivo.*

Proposição 4.13. (a) $\operatorname{Prim}_{J_{5,a}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - qe_2e_1)\}$;

(b) $\operatorname{Prim}_{J_{5,b}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2)\}$;

(c) $\operatorname{Prim}_{J_{6,a}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1)\}$;

(d) $\operatorname{Prim}_{J_{6,b}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_2e_3 - qe_3e_2)\}$.

Os ideais primitivos descritos acima têm altura 2.

Para terminar este parágrafo, daremos um exemplo de um $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo simples C de aniquilador $J_{5,b}$. $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples de aniquiladores $J_{5,a}$, $J_{6,a}$ e $J_{6,b}$ podem ser obtidos fácilmente de C e η por torção e/ou trocando q e q^{-1} nas fórmulas abaixo. Seja $C = \mathbb{K}[x, y^{\pm 1}]$ o espaço vectorial de base $\{x^a y^b \mid a \geq 0, b \in \mathbb{Z}\}$. Definimos uma acção de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ em C por

$$\begin{aligned} e_1.x^a y^b &= [a] x^{a-1} y^b, \\ e_2.x^a y^b &= q^{-b} x^{a+1} y^{b-1}, \\ e_3.x^a y^b &= x^a y^{b+1}, \qquad a \geq 0, b \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{13}$$

Lema 4.14. *O $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo C definido acima é simples e* $\operatorname{ann} C = J_{5,b}$.

4.3.7 Os $\mathcal{H}$-estratos de (e_1) e (e_3)

Como $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/(e_1) \simeq U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$, os espaços $\operatorname{Prim}_{(e_1)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ e $\operatorname{Prim}_{(0)} U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ podem ser naturalmente identificados. Conforme vimos em 3.2, ou então por [17, Thm. 2.4],

$$\operatorname{Prim}_{(0)} U_q(\mathfrak{sl}_3^+) = \{(\Omega - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}, \tag{14}$$

onde Ω é dado por (7).

Proposição 4.15. *Sejam Ω_i, $i = 1, 2$ tais como foram definidos em (8). Então,*

(a) $\operatorname{Prim}_{(e_1)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1, \Omega_2 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$;

(b) $\operatorname{Prim}_{(e_3)} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_3, \Omega_1 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$.

Estes ideais primitivos têm altura 4.

Um exemplo de um $U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$-módulo simples de aniquilador $(\Omega - 1) \subseteq U_q(\mathfrak{sl}_3^+)$ é o espaço vectorial $D = \mathbb{K}[t]$, com acção induzida por

$$\begin{aligned} e_1.t^k &= [k]t^{k-1}, \\ e_2.t^k &= t^{k+1}, \qquad\qquad k \geq 0 \end{aligned}$$

(ver [15, 6.2]). Esta acção estende-se a $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ se definirmos $e_3.t^k = 0$ para todo o $k \geq 0$, e obtemos deste modo um $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo simples de aniquilador $(e_3, \Omega_1 - 1)$. Torcendo esta acção por automorfismos da forma $\sigma_{\bar{\lambda}}$, $\bar{\lambda} \in (\mathbb{K}^*)^3$, e eventualmente também η, fácilmente conseguimos exemplos de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples que correspondem a cada um dos ideais primitivos dados pela Proposição 4.15.

4.3.8 O $\mathcal{H}$-estrato de $(e_1e_2 - q^{\pm 1}e_2e_1, e_2e_3 - q^{\pm 1}e_3e_2)$

Sejam $\delta, \epsilon \in \{-1, 1\}$, e considere-se o espaço afim quântico $\mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x, y, z]$, gerado por x, y, z com as relações $xz = zx$, $xy = q^\epsilon yx$, $yz = q^\delta zy$. Existem isomorfismos

$$U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{8,a} \simeq \mathbb{K}_{1,1}[x, y, z], \qquad U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{8,b} \simeq \mathbb{K}_{-1,-1}[x, y, z], \tag{15}$$

$$U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_9 \simeq \mathbb{K}_{1,-1}[x, y, z], \qquad U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_{10} \simeq \mathbb{K}_{-1,1}[x, y, z], \tag{16}$$

cada um enviando e_1, e_2, e_3 em x, y, z, respectivamente.

Denotemos a localização de $\mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x, y, z]$ no conjunto multiplicativamente fechado gerado pelos elementos normais x, y e z por $\mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$. Resulta de [10, Thm. 4.4] e do Teorema 2.3 que o isomorfismo $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/J_9 \simeq \mathbb{K}_{1,-1}[x, y, z]$ induz um homeomorfismo entre $\mathrm{Prim}_{J_9}\, U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ e o espaço dos ideais maximais de $\mathbb{K}_{1,-1}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$, e análogamente para $J_{8,a}$, $J_{8,b}$ e J_{10}. Além disso, pelo Teorema 2.3(b), a contracção e a extensão induzem homeomorfismos mutuamente inversos entre o espaço dos ideais maximais de $\mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ e o espaço dos ideais maximais de $Z_{\delta,\epsilon}$, o centro de $\mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$.

Lema 4.16. *O centro de $\mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ é a álgebra dos polinómios de Laurent na variável $w_{\delta,\epsilon} = x^\delta z^\epsilon$:*

$$Z_{\delta,\epsilon} = \mathbb{K}[w_{\delta,\epsilon}^{\pm 1}].$$

Resulta da teoria de estratificação de Goodearl e Letzter e do lema anterior que os ideais primitivos de $\mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x, y, z]$ sem elementos homogéneos não nulos (relativamente à graduação induzida pelos isomorfismos (15) e (16)) são os ideais da forma

$$I_{\delta,\epsilon}^\alpha = \mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x, y, z] \cap \mathbb{K}_{\delta,\epsilon}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, z^{\pm 1}](w_{\delta,\epsilon} - \alpha), \tag{17}$$

para $\alpha \in \mathbb{K}^*$.

Lema 4.17. *Seja $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Então,*

(a) $I^{\alpha}_{1,1} = \mathbb{K}_{1,1}[x, y, z](xz - \alpha)$;

(b) $I^{\alpha}_{-1,-1} = \mathbb{K}_{-1,-1}[x, y, z](xz - \alpha^{-1})$;

(c) $I^{\alpha}_{1,-1} = \mathbb{K}_{1,-1}[x, y, z](x - \alpha z)$;

(d) $I^{\alpha}_{-1,1} = \mathbb{K}_{-1,1}[x, y, z](z - \alpha x)$.

Proposição 4.18. (a) $\mathrm{Prim}_{J_{8,a}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - qe_2e_1, e_1e_3 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$;

(b) $\mathrm{Prim}_{J_{8,b}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, e_1e_3 - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$;

(c) $\mathrm{Prim}_{J_9} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, e_1 - \alpha e_3) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$;

(d) $\mathrm{Prim}_{J_{10}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - qe_2e_1, e_1 - \alpha e_3) \mid \alpha \in \mathbb{K}^*\}$.

Estes ideais primitivos têm altura 4.

Consideremos agora a acção de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ no espaço vectorial $E = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ dos polinómios de Laurent na variável t, dada pelas fórmulas ($k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{K}^*$):

$$e_1.t^k = t^{k+1}, \qquad e_2.t^k = q^k t^{k-1}, \qquad e_3.t^k = \alpha t^{k-1}. \tag{18}$$

Então $E = E_\alpha$ adquire uma estrutura de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo simples e é fácil de ver que

$$\mathrm{ann}\, E_\alpha = (e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, e_1e_3 - \alpha).$$

Para obter $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples com aniquiladores em $\mathrm{Prim}_{J_9} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, podemos considerar os módulos E'_α, dados pela seguinte acção de $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ em $\mathbb{K}[t^{\pm 1}]$:

$$e_1.t^k = \alpha t^{k+1}, \qquad e_2.t^k = q^k t^{k-1}, \qquad e_3.t^k = t^{k+1}. \tag{19}$$

Finalmente, torcendo E_α pelo automorfismo η e trocando q por q^{-1} na fórmula para a acção de e_2 em E'_α dada em (19), obtemos $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulos simples com aniquiladores em $\mathrm{Prim}_{J_{8,a}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$ e $\mathrm{Prim}_{J_{10}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$, respectivamente.

4.3.9 Os $\mathcal{H}$-estratos de $(e_2e_3 - q^{\pm 1}e_3e_2, e_1)$ e $(e_1e_2 - q^{\pm 1}e_2e_1, e_3)$

Seja $\mathbb{K}_q[x, y]$ o plano quântico gerado por x e y, sujeitos unicamente à relação $yx = qxy$. É bem conhecido que $\mathbb{K}_q[x, y]$ é um anel primitivo; de facto, deixemos $\mathbb{K}_q[x, y]$ agir em $\overline{F} = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ por:

$$x.t^k = t^{k+1}, \qquad y.t^k = q^k t^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Então, $\overline{F}$ é uma representação fiel de $\mathbb{K}_q[x,y]$ que é simples. Em virtude do isomorfismo

$$\mathbb{K}_q[x,y] \longrightarrow U_q(\mathfrak{sl}_4^+)/(e_2e_3 - qe_3e_2, e_1), \tag{20}$$

que envia x em $e_3 + (e_2e_3 - qe_3e_2, e_1)$ e y em $e_2 + (e_2e_3 - qe_3e_2, e_1)$, obtemos o $U_q(\mathfrak{sl}_4^+)$-módulo simples $F = \mathbb{K}[t^{\pm 1}]$ dado por

$$e_1.t^k = 0, \qquad e_2.t^k = q^k t^{k-1}, \qquad e_3.t^k = t^{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{21}$$

Note-se que $\operatorname{ann} F = (e_2e_3 - qe_3e_2, e_1)$, por construção. Módulos simples de aniquiladores $(e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2, e_1)$ e $(e_1e_2 - q^{\pm 1}e_2e_1, e_3)$ podem obter-se, como antes, trocando q por q^{-1} em (21) e usando o automorfismo η.

Proposição 4.19. (a) $\operatorname{Prim}_{J_{11,a}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_2e_3 - qe_3e_2, e_1)\}$*;*

(b) $\operatorname{Prim}_{J_{11,b}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - q^{-1}e_2e_1, e_3)\}$*;*

(c) $\operatorname{Prim}_{J_{12,a}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_2e_3 - q^{-1}e_3e_2, e_1)\}$*;*

(d) $\operatorname{Prim}_{J_{12,b}} U_q(\mathfrak{sl}_4^+) = \{(e_1e_2 - qe_2e_1, e_3)\}$*.*

Os ideais primitivos descritos acima têm altura 4.

Referências

[1] J. Alev and F. Dumas, *Sur le corps des fractions de certaines algèbres quantiques*, J. Algebra **170** (1994), no. 1, 229–265.

[2] ———, *Rigidité des plongements des quotients primitifs minimaux de $U_q(\mathrm{sl}(2))$ dans l'algèbre quantique de Weyl-Hayashi*, Nagoya Math. J. **143** (1996), 119–146.

[3] N. Andruskiewitsch and F. Dumas, *On the automorphisms of $U_q^+(\mathfrak{g})$*, arXiv:math.QA/0301066.

[4] J.L. Bueso, J. Gómez Torrecillas, F.J. Lobillo, and F.J. Castro, *An introduction to effective calculus in quantum groups*, Rings, Hopf Algebras, and Brauer Groups (Antwerp/Brussels, 1996), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 197, Dekker, New York, 1998, pp. 55–83.

[5] P. Caldero, *Générateurs du centre de $\check{U}_q(\mathrm{sl}(N+1))$*, Bull. Sci. Math. **118** (1994), no. 2, 177–208.

[6] ———, *Sur le centre de $U_q(\mathfrak{n}^+)$*, Beiträge Algebra Geom. **35** (1994), no. 1, 13–24, Festschrift on the occasion of the 65th birthday of Otto Krötenheerdt.

[7] ______, *Étude des q-commutations dans l'algèbre $U_q(\mathfrak{n}^+)$*, J. Algebra **178** (1995), no. 2, 444–457.

[8] J. Dixmier, *Enveloping Algebras*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Revised reprint of the 1977 translation.

[9] K.R. Goodearl and T.H. Lenagan, *Catenarity in quantum algebras*, J. Pure Appl. Algebra **111** (1996), no. 1-3, 123–142.

[10] K.R. Goodearl and E.S. Letzter, *The Dixmier-Moeglin equivalence in quantum coordinate rings and quantized Weyl algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 3, 1381–1403.

[11] M. Gorelik, *The prime and the primitive spectra of a quantum Bruhat cell translate*, J. Algebra **227** (2000), no. 1, 211–253.

[12] T. Hayashi, *q-analogues of Clifford and Weyl algebras—spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), no. 1, 129–144.

[13] E.E. Kirkman and L.W. Small, *q-analogs of harmonic oscillators and related rings*, Israel J. Math. **81** (1993), no. 1-2, 111–127.

[14] S. Launois, *Primitive ideals and automorphism group of $U_q^+(\mathrm{B}_2)$*, arXiv:math.RA/0412358.

[15] S. Lopes, *Separation of variables for $U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})^+$*, Canad. Math. Bull., aceite.

[16] ______, *On the structure and representation theory of the quantized enveloping algebra $U_q(\mathfrak{g})^+$ for $\mathfrak{g}$ semisimple*, Ph.D. thesis, University of Wisconsin-Madison, 2003.

[17] M.P. Malliavin, *Algèbre d'Heisenberg quantique*, Bull. Sci. Math. **118** (1994), no. 6, 511–537.

[18] C.M. Ringel, *PBW-bases of quantum groups*, J. Reine Angew. Math. **470** (1996), 51–88.

O problema da palavra para pseudo-semi-reticulados livres

Luís A. Oliveira[a]

[a]Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e-mail: loliveir@fc.up.pt

Resumo

Neste artigo fazemos uma breve introdução ao conceito de pseudo-semi-reticulado e à estrutura destas álgebras. A classe de todos os pseudo-semi-reticulados constitui uma variedade de álgebras binárias idempotentes e, como tal, tem objectos livres. Na última secção deste artigo descrevemos uma solução para o problema da palavra nos pseudo-semi-reticulados livres.

Palavras-chave: Pseudo-semi-reticulado, problema da palavra, semigrupo localmente inverso, semi-reticulado.

1 Introdução

A definição usual de inverso de um elemento num grupo faz uso do elemento neutro para a operação e, como tal, não é uma definição adequada para semigrupos. Em teoria de semigrupos usamos a noção de inverso segundo von Neumann: o elemento x' é um inverso de x se $xx'x = x$ e $x'xx' = x'$. Claramente o inverso de um elemento x num grupo G é também um inverso nesta segunda definição. Contudo, esta segunda definição é mais fraca que a primeira pois, por exemplo, um monóide em que todo o elemento tem inverso segundo a definição usual em teoria de grupos tem que ser um grupo, enquanto que com a definição de inverso segundo von Neumann não.

Um semigrupo em que todo o elemento tem inversos diz-se **regular**, enquanto que um semigrupo em que todo o elemento tem exactamente um inverso diz-se **inverso**. Ao contrário do que acontece nos grupos, um elemento de um semigrupo pode ter vários inversos. Daí que haja semigrupos regulares que não sejam inversos. O conjunto dos inversos de um elemento x de um semigrupo S denota-se por $V(x)$. Se x' for um inverso de x, então xx' e $x'x$ são idempotentes de S. O conjunto dos idempotentes de S denota-se por $E(S)$.

Contrariamente ao que acontece nos grupos, a estrutura dos idempotentes de um semigrupo S dá-nos geralmente muita informação acerca da estrutura do próprio semigrupo. De facto, muitas das classes de semigrupos (especialmente de semigrupos regulares) que se têm estudado podem ser definidas à custa de propriedades no conjunto dos idempotentes. Por exemplo, um grupo é precisamente um semigrupo regular com um só idempotente, enquanto que um semigrupo inverso S é precisamente um semigrupo regular em que $E(S)$ constitui um sub-semi-reticulado de S. No entanto, a multiplicação definida num semigrupo regular nem sempre é uma operação bem definida no conjunto $E(S)$ contrariamente ao que acontece nos dois exemplos anteriores. Os semigrupos regulares S em que a multiplicação está bem definida em $E(S)$, ou seja, os semigrupos regulares S em que $ef \in E(S)$ para quaisquer $e, f \in E(S)$, chamam-se semigrupos ortodoxos. Claramente os semigrupos inversos são ortodoxos.

Há ainda outros semigrupos regulares S em que, embora a multiplicação não seja uma operação bem definida em $E(S)$, é possível definir uma outra operação no conjunto $E(S)$ de forma natural a partir da multiplicação em S. Um desses exemplos é o caso dos semigrupos localmente inversos. Veremos que é possível definir uma nova operação $\wedge$ no conjunto $E(S)$ dos idempotentes de um semigrupo localmente inverso S de modo natural. As álgebras $(E(S), \wedge)$ assim obtidas são designadas por pseudo-semi-reticulados.

Os submonóides locais de um semigrupo S são os submonóides de S da forma eSe com $e \in E(S)$. Claramente, e é a identidade do submonóide eSe. Um

semigrupo localmente inverso é um semigrupo regular em que todos os submonóides locais são semigrupos inversos. Existem muitas formas equivalentes de caracterizar os semigrupos localmente inversos. Veremos algumas delas de seguida.

Dado um semigrupo S, definimos as relações binárias ω^r e ω^l em $E(S)$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} e\,\omega^l f &\Leftrightarrow ef = e; \\ e\,\omega^r f &\Leftrightarrow fe = e. \end{aligned}$$

Definimos também a relação ω em $E(S)$ como sendo $\omega = \omega^r \cap \omega^l$. As relações binárias ω^r e ω^l são quase ordens, enquanto que ω é uma ordem parcial. Para $\nu \in \{\omega, \omega^r, \omega^l\}$ e $f \in E(S)$, denotamos por $\nu(f)$ o seguinte conjunto:

$$\nu(f) = \{e \in E(S) \mid e\,\nu\, f\}.$$

Claramente,

$$\omega^r(f) = fS^1 \cap E(S),\ \omega^l(f) = S^1 f \cap E(S) \ \text{ e } \ \omega(f) = fS^1 f \cap E(S)$$

onde S^1 representa o semigrupo S com a identidade 1 adicionada. Logo $\omega(f)$ $[\omega^r(f),\ \omega^l(f)]$ é o conjunto dos idempotentes que pertencem ao ideal principal [à direita, à esquerda] de S gerado por f. O **conjunto sanduíche** $S(e, f)$ dos idempotentes $e, f \in E(S)$ é o conjunto

$$S(e, f) = \omega^r(f) \cap \omega^l(e) \cap V(ef) = E(S) \cap fSe \cap V(ef) = fV(ef)e.$$

Note-se que em geral $S(e, f) \neq S(f, e)$. Além disso, se S for um semigrupo regular, então $S(e, f) \neq \emptyset$ para quaisquer $e, f \in E(S)$.

Num semigrupo regular S definimos a relação binária $\leq$ como se segue:

$$a \leq b \ \text{ se e só se } \ a = eb = bf \ \text{ para alguns idempotentes } \ e, f \in E(S).$$

A relação $\leq$ é de facto uma ordem parcial que extende a ordem parcial ω a todo o semigrupo e é normalmente designada pela **ordem parcial natural** em S. Dizemos que a ordem parcial natural em S é compatível com a multiplicação se

$$a \leq b \ \text{ implica } \ ac \leq bc \ \text{ e } \ ca \leq cb \ \text{ para qualquer } \ c \in S.$$

No teorema seguinte indicamos algumas das condições equivalentes à definição de semigrupo localmente inverso.

Teorema 1.1. *Seja S um semigrupo regular. As condições seguintes são equivalentes:*

(i) S é localmente inverso;

(*ii*) $\leq$ *é compatível com a multiplicação;*

(*iii*) $|S(e,f)| = 1$ *para quaisquer* $e, f \in E(S)$*;*

(*iv*) $\omega(e)$ *é um semi-reticulado para qualquer* $e \in E(S)$*;*

(*v*) $\omega^r(e)$ *é uma banda normal à direita* ($x^2 = x,\ xyz = yxz$) *para qualquer* $e \in E(S)$*;*

(*vi*) $\omega^l(e)$ *é uma banda normal à esquerda* ($x^2 = x,\ xyz = xzy$) *para qualquer* $e \in E(S)$*;*

(*vii*) *para quaisquer* $e, f \in E(S)$ *existe um único idempotente* $e \wedge f \in E(S)$ *tal que* $\omega^r(e) \cap \omega^l(f) = \omega(e \wedge f)$*.*

O elemento $e \wedge f$ referido na condição (*vii*) do teorema anterior é precisamente o único elemento pertencente ao conjunto sanduíche $S(f,e)$. Daí que, dado um semigrupo localmente inverso S, se possa definir de forma natural uma operação binária $\wedge$ no conjunto $E(S)$ da seguinte forma: dados $e, f \in E(S)$, $e \wedge f$ é o único idempotente pertencente a $S(f,e)$. A álgebra binária $(E(S), \wedge)$ obtida deste modo chama-se um **pseudo-semi-reticulado**.

Na próxima secção falaremos um pouco mais acerca destas álgebras, enquanto que na secção 3 trataremos a sua estrutura. Finalmente, na última secção, apresentaremos uma solução para o problema da palavra nos pseudo-semi-reticulados livres.

2 Pseudo-semi-reticulados

A definição apresentada na secção anterior para semigrupos localmente inversos é a usual e aquela que justifica a designação "*localmente inverso*". Hoje em dia, a noção de pseudo-semi-reticulado é apresentada como uma caracterização dos semigrupos localmente inversos em termos da estrutura dos seus idempotentes. Contudo, historicamente, aconteceu o reverso.

Nambooripad [6] apresentou uma caracterização geral do conjunto dos idempotentes de um semigrupo regular como uma determinada estrutura a que chamou conjunto bi-ordenado. O termo pseudo-semi-reticulado foi introduzido por Schein [11] para se referir a uma classe de álgebras mais geral do que aquela a que nos referimos aqui. Na realidade, as álgebras a que nos referimos neste artigo como pseudo-semi-reticulados são precisamente os pseudo-semi-reticulados (segundo Schein) que têm também uma estrutura de conjunto bi-ordenado. Nambooripad [7], com o intuito de caracterizar os semigrupos regulares cujo conjunto bi-ordenado dos idempotentes constituía também um pseudo-semi-reticulado (segundo Schein), introduziu os semigrupos localmente inversos com a designação de semigrupos pseudo-inversos.

O resultado seguinte foi provado por Nambooripad [7] e indica que a classe de todos os pseudo-semi-reticulados constitui uma variedade de álgebras binárias idempotentes.

Teorema 2.1. *A classe de todos os pseudo-semi-reticulados é a variedade de álgebras binárias definida pelas seguintes identidades:*

(*i*) $x \wedge x = x$;

(*ii*) $(x \wedge y) \wedge (x \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;

(*iii*) $(x \wedge z) \wedge (y \wedge z) = x \wedge (y \wedge z)$;

(*iv*) $((x \wedge y) \wedge (x \wedge z)) \wedge (x \wedge w) = (x \wedge y) \wedge ((x \wedge z) \wedge (x \wedge w))$;

(*v*) $((y \wedge x) \wedge (z \wedge x)) \wedge (w \wedge x) = (y \wedge x) \wedge ((z \wedge x) \wedge (w \wedge x))$.

O conceito de variedade, devido às suas propriedades, é uma das melhores formas de classificar e agrupar álgebras. Contudo, muitas classes de álgebras que têm sido estudadas não constituem variedades. Dois desses exemplos são as classes dos semigrupos localmente inversos e dos semigrupos regulares. Ambas as classes não constituem variedades devido ao facto de subsemigrupos de semigrupos regulares não serem necessariamente regulares. Hall [2] e, independentemente, Kaďourek e Szendrei [4] introduziram o conceito de e-variedade de forma a ultrapassarem este problema. Uma **e-variedade** de semigrupos regulares é uma classe destas álgebras fechada para imagens homomorfas, subsemigrupos regulares e produtos directos. Como se observa, a diferença entre o conceito de e-variedade e o conceito de variedade reside no facto de no primeiro considerarmos somente subsemigrupos regulares enquanto que no segundo consideramos subsemigrupos em geral. As classes de todos os semigrupos localmente inversos e de todos os semigrupos regulares são dois exemplos de e-variedades. Devemos, no entanto, notar que algumas das propriedades válidas para variedades, não são válidas, em geral, para e-variedades. Recomendamos [3] para uma revisão sobre os principais resultados envolvendo e-variedades.

O conjunto de todas as e-variedades de semigrupos regulares constitui um reticulado para a relação de inclusão. Denotamos por $\mathcal{L}_e(\mathbf{LI})$ o reticulado das e-variedades de semigrupos localmente inversos e por $\mathcal{L}(\mathbf{PS})$ o reticulado das variedades de pseudo-semi-reticulados. O resultado seguinte obtido por Auinger [1] é uma generalização do Teorema 2.1.

Teorema 2.2. *A função*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_e(\mathbf{LI}) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbf{PS}) \\ \mathbf{V} & \longmapsto & \{(E(S),\wedge) \mid S \in \mathbf{V}\} \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo completo.

Pelo teorema anterior, um estudo aprofundado do reticulado $\mathcal{L}(\mathbf{PS})$ permite-nos obter muita informação acerca do reticulado das e-variedades de semigrupos localmente inversos. Um dos teoremas fundamentais no estudo do reticulado de variedades de álgebras diz-nos que o reticulado das variedades de pseudo-semi-reticulados é anti-isomorfo ao reticulado das congruência invariantes no pseudo-semi-reticulado livre sobre um conjunto numerável mas infinito. Claro que, para estudarmos o reticulado destas congruências, é necessário primeiro compreender a estrutura dos pseudo-semi-reticulados livres. Isto traz-nos ao tema indicado no título deste artigo: o problema da palavra para pseudo-semi-reticulados livres. Denotamos por $F_2(X)$ a álgebra binária absolutamente livre e por ρ a congruência em $F_2(X)$ tal que $F_2(X)/\rho$ é o pseudo-semi-reticulado livre sobre X. O problema da palavra para pseudo-semi-reticulados livres consiste em determinar quando é que duas palavras $u, v \in F_2(X)$ são ρ-equivalentes ou não. Uma solução deste problema permite-nos compreender melhor a estrutura dos pseudo-semi-reticulados livres.

Deixamos, por enquanto, o estudo do problema da palavra para pseudo-semi-reticulados livres e voltamos ao reticulado $\mathcal{L}(\mathbf{PS})$. O problema da palavra será retomado na última secção deste artigo.

O reticulado $\mathcal{L}(\mathbf{PS})$ está naturalmente dividido em dois intervalos. O intervalo constituído pelas variedades de pseudo-semi-reticulados que são também variedades de semigrupos e o intervalo constituído pela variedades de pseudo-semi-reticulados que contêm álgebras que não são semigrupos. O primeiro está completamente determinado [11]: é composto pelas oito variedades de bandas normais ($x^2 = x$, $xyzx = xzyx$). O segundo intervalo é, no entanto, bem mais complexo. Existe a menor variedade de pseudo-semi-reticulados que contém álgebras que não são semigrupos. Esta variedade contém ainda a variedade formada por todas as bandas normais. Para mais informação acerca deste segundo intervalo referimos o leitor para [8].

3 Estrutura dos pseudo-semi-reticulados

Um semigrupo zero à direita [esquerda] é um semigrupo que satisfaz a identidade $yx = x$ [$xy = x$]. Estes semigrupos são também pseudo-semi-reticulados. Na realidade, as classes de todos os semigrupos zero à direita e de todos os semigrupos zero à esquerda são duas das oito variedades de bandas normais. Obviamente, em qualquer conjunto A, podemos definir uma e uma só operação binária que torna A num semigrupo zero à direita [esquerda]. Denotamos por A_r $[A_l]$ o semigrupo zero à direita [esquerda] de universo A.

Consideremos agora um pseudo-semi-reticulado arbitrário E e sejam E_r e E_l os semigrupos zero à direita e zero à esquerda, respectivamente, de universo E. Logo $E_l \times E \times E_r$ é um pseudo-semi-reticulado com o seguinte produto:

$$(e_1, g_1, f_1) \wedge (e_2, g_2, f_2) = (e_1, g_1 \wedge g_2, f_2).$$

Denotamos por $\tilde{E}$ o subconjunto

$$\tilde{E} = \{(e, g, f) \in E_l \times E \times E_r \mid g \in \omega^r(e) \cap \omega^l(f) = \omega(e \wedge f)\}$$

de $E_l \times E \times E_r$. Se (e_1, g_1, f_1), $(e_2, g_2, f_2) \in \tilde{E}$, então $g_1 \wedge g_2 \;\omega^r\; g_1 \;\omega^r\; e_1$ e $g_1 \wedge g_2 \;\omega^l\; g_2 \;\omega^l\; f_2$, ou seja, $g_1 \wedge g_2 \in \omega^r(e_1) \cap \omega^l(f_2)$ e portanto

$$(e_1, g_1, f_1) \wedge (e_2, g_2, f_2) = (e_1, g_1 \wedge g_2, f_2) \in \tilde{E}.$$

Acabámos de verificar que $\tilde{E}$ é um sub-pseudo-semi-reticulado de $E_l \times E \times E_r$. Além disso, $E_{e,f} = \{(e, g, f) \mid g \in \omega(e \wedge f)\}$, $e, f \in E(S)$, são sub-semi-reticulados isomorfos a $\omega(e \wedge f)$ e $\tilde{E}$ é a união disjunta destes sub-semi-reticulados. É fácil de verificar que $E_{e,f}$, $e, f \in E(S)$, são os sub-semi-reticulados maximais de $\tilde{E}$. Concluímos assim:

Proposição 3.1. [5, Theorem 2.2] *O pseudo-semi-reticulado $\tilde{E}$ é a união disjunta dos seus sub-semi-reticulados maximais. Além disso, a função*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \longrightarrow & E \\ (e, g, f) & \longmapsto & g \end{array}$$

é um homomorfismo sobrejectivo.

A proposição anterior diz-nos que qualquer pseudo-semi-reticulado é a imagem homomorfa de um pseudo-semi-reticulado que é a união disjunta dos seus sub-semi-reticulados maximais. Vejamos agora qual é a estrutura destes últimos. Consideremos:

- I e Λ dois conjuntos não vazios;
- $(L_\lambda,\ \lambda \in \Lambda)$, $(R_i,\ i \in I)$ e $(E_{i\lambda},\ (i, \lambda) \in I \times \Lambda)$ três famílias de semi-reticulados tais que os $E_{i\lambda}$ são disjuntos dois a dois;
- para $(i, \lambda) \in I \times \Lambda$, $\varphi_{i\lambda} : E_{i\lambda} \longrightarrow L_\lambda$ e $\psi_{i\lambda} : E_{i\lambda} \longrightarrow R_i$ são homomorfismos injectivos cujas imagens são ideais de L_λ e R_i, respectivamente;

- $E = \cup_{(i,\lambda)\in I\times\Lambda} E_{i\lambda}$.

Dado um elemento x de um dos semi-reticulados anteriores, denotamos por $(x]$ o ideal principal gerado por x. O resultado seguinte foi provado por Pastijn em [10].

Teorema 3.2. *Com as definições anteriores, se para quaisquer (i,λ), $(j,\mu) \in I\times\Lambda$, qualquer $x_{i\lambda}\in E_{i\lambda}$ e qualquer $y_{j\mu}\in E_{j\mu}$, existir $z_{i\mu}\in E_{i\mu}$ tal que*

$$((x_{i\lambda}\psi_{i\lambda}] \cap E_{i\mu}\psi_{i\mu})\psi_{i\mu}^{-1} \cap ((y_{j\mu}\varphi_{j\mu}] \cap E_{i\mu}\varphi_{i\mu})\varphi_{i\mu}^{-1} = (z_{i\mu}],$$

então E, com o produto definido por $x_{i\lambda}\wedge y_{j\mu} = z_{i\mu}$, é um pseudo-semi-reticulado. Mais ainda, E é a união disjunta dos seus sub-semi-reticulados maximais $E_{i\lambda}$, $(i,\lambda)\in I\times\Lambda$. Por outro lado, qualquer pseudo-semi-reticulado que seja a união disjunta dos seus sub-semi-reticulados maximais pode ser construído desta forma.

Portanto, cada pseudo-semi-reticulado E que seja a união disjunta dos seus sub-semi-reticulados maximais pode ser interpretado como uma matriz onde cada entrada é um sub-semi-reticulado maximal $E_{i\lambda}$ (ver diagrama abaixo); os semi-reticulados que se encontram na mesma linha [coluna] podem ser todos mergulhados como ideais no mesmo semi-reticulado R_i $[L_\lambda]$ de modo a que a condição expressa no Teorema 3.2 seja satisfeita; e se $a\in E$ pertence a um semi-reticulado da linha i e $b\in E$ pertence a um semi-reticulado da coluna λ, então $a\wedge b$ pertence ao semi-reticulado que se encontra na estrada (i,λ) da matriz (ver diagrama abaixo). Daí que que a união de todos os semi-reticulados que se encontram na mesma linha [coluna] seja um sub-pseudo-semi-reticulado de E. Na realidade, para $i\in I$ e $\lambda\in\Lambda$,

$$\cup_{\mu\in\Lambda} E_{i\mu} \qquad \text{e} \qquad \cup_{j\in I} E_{j\lambda}$$

são semigrupos: o primeiro é uma banda normal à direita e o segundo é uma banda normal à esquerda.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|cc}
\cline{1-4}
E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1n} & \longrightarrow & R_1 \\
\cline{1-4}
E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2n} & \longrightarrow & R_2 \\
\cline{1-4}
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\cline{1-4}
E_{m1} & E_{m2} & \cdots & E_{mn} & \longrightarrow & R_m \\
\cline{1-4}
\multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & & \\
\multicolumn{1}{c}{L_1} & \multicolumn{1}{c}{L_2} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{L_n} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline
a & a\wedge b & \\
\hline
 & b & \\
\hline
 & & \\
\hline
\end{array}$$

Podemos ainda ir um pouco mais além. Os pseudo-semi-reticulados do Teorema 3.2 em que os homomorfismos injectivos $\psi_{i\lambda}$ e $\varphi_{i\lambda}$ são todos isomorfismos (e, portanto, R_i, L_λ, $E_{i\lambda}$ são todos isomorfos) dizem-se **pseudo-semi-reticulados elementares**. Meakin e Pastijn [5] provaram o seguinte resultado:

Teorema 3.3. *Qualquer pseudo-semi-reticulado divide um pseudo-semi-reticulado elementar, ou seja, qualquer pseudo-semi-reticulado é a imagem homomorfa de um sub-pseudo-semi-reticulado de um pseudo-semi-reticulado elementar.*

4 O problema da palavra para pseudo-semi-reticulados livres

Dado um conjunto X não vazio, definimos recursivamente os seguintes conjuntos:

$$U_0 = X \ ;$$
$$U_i = U_{i-1} \cup \{(u \wedge v) \mid u, v \in U_{i-1}\} \ ;$$

para quaisquer $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $F_2(X)$ o conjunto $\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ e designaremos por palavras os elementos deste conjunto. As palavras de $F_2(X)$ tornam-se rapidamente muito complexas e de difícil percepção essencialmente devido à quantidade de parêntesis que temos de colocar. Para tentar minimizar este problema usaremos as seguintes convenções de escrita:

$$\wedge(u_1, u_2, \cdots, u_n) = (\cdots((u_1 \wedge u_2) \wedge u_3) \wedge \cdots) \wedge u_n \ ;$$
$$(u_1, u_2, \cdots, u_n)\wedge = u_1 \wedge (u_2 \wedge (\cdots \wedge (u_{n-1} \wedge u_n) \cdots)) \ ;$$

onde u_1, $u_2, \cdots, u_n$ são palavras de $F_2(X)$. Denotamos também por uR e uL a primeira e a última letra de X em $u \in F_2(X)$, respectivamente. Uma subpalavra de uma palavra $u \in F_2(X)$ é uma palavra $v \in F_2(X)$ tal que $u = avb$ onde a e b são sequências de letras no alfabeto $X \cup \{\ (\ ,\ )\ ,\ \wedge\ \}$.

No conjunto $F_2(X)$ temos naturalmente definida uma operação $\wedge$. É bem conhecido que a álgebra $(F_2(X), \wedge)$ é a álgebra binária absolutamente livre. Como a classe de todos os pseudo-semi-reticulados constitui uma variedade de álgebras, então existem os pseudo-semi-reticulados livres. Mais concretamente, existe uma congruência em $F_2(X)$ cuja álgebra quociente é o pseudo-semi-reticulado livre sobre X. Neste artigo denotaremos por ρ essa congruência. Apresentamos de seguida uma solução para o problema da palavra para os pseudo-semi-reticulados livres, isto é, um processo algorítmico para responder à questão de quando é que $(u, v) \in \rho$. Observe-se também que este problema da palavra é equivalente ao problema de determinar quando é que uma identidade é satisfeita por todos os pseudo-semi-reticulados. Os resultados que se seguem podem-se encontrar com mais detalhe (incluindo as respectivas provas) em [9].

Um sistema de reescrita em $F_2(X)$ é um subconjunto de pares ordenados (u, v) de palavras $u, v \in F_2(X)$. Dado um sistema de reescrita R, denotamos por $\xrightarrow{R}$ a relação binária definida por: para quaisquer $s, t \in F_2(X)$, $s \xrightarrow{R} t$ se e só se existir $(u, v) \in R$ tal que u é uma subpalavra de s e t é obtido de s por substituição da subpalavra u por v. Usualmente abrevia-se a notação e escreve-se somente $s \longrightarrow t$. Obviamente, se $(u, v) \in R$, então $u \longrightarrow v$. Por isso, optaremos por escrever os elementos de R na forma $u \longrightarrow v$ em vez da notação em par ordenado. Denotamos por $\xrightarrow{*}$ o fecho transitivo e reflexivo de $\longrightarrow$. Um sistema de reescrita diz-se **localmente confluente** se para quaisquer $t, u, v \in F_2(X)$ tais que $t \longrightarrow u$ e $t \longrightarrow v$, existir $w \in F_2(X)$ tal que $u \xrightarrow{*} w$ e $v \xrightarrow{*} w$. Um sistema de reescrita sem sequências infinitas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $u_{n-1} \longrightarrow u_n$ e $u_n \neq u_{n-1}$ diz-se **noetheriano**. Uma palavra $u \in F_2(X)$ diz-se **irredutível** para um sistema de reescrita R se para qualquer $v \in F_2(X)$, $u \longrightarrow v$ implica $u = v$. O seguinte resultado é uma propriedade importante dos sistemas de reescrita noetherianos e localmente confluentes.

Proposição 4.1. *Se um sistema de reescrita R for noetheriano e localmente confluente, então para qualquer $u \in F_2(X)$ existe uma única palavra irredutível $v \in F_2(X)$ tal que $u \xrightarrow{*} v$.*

Se R for um sistema de reescrita noetheriano e localmente confluente, então chamamos à palavra irredutível $v \in F_2(X)$ dada pela proposição anterior a **forma irredutível** de $u \in F_2(X)$. Como o sistema é noetheriano, a forma irredutível de uma palavra u é facilmente obtida a partir de u aplicando as regras de reescrita sucessivamente até que mais nenhuma regra de reescrita possa ser aplicada. Nessa altura obtemos a forma irredutível de u.

Corolário 4.2. *Se σ é uma congruência gerada por um sistema de reescrita noetheriano e localmente confluente R, então, para quaisquer $u, v \in F_2(X)$, $(u, v) \in \sigma$ se e só se a forma irredutível de u para o sistema de reescrita R for igual à forma irredutível de v.*

O próximo resultado caracteriza a congruência ρ em termos de um sistema de reescrita.

Proposição 4.3. *A congruência ρ é a congruência gerada pelo sistema de reescrita constituído pelas seguintes regras:*

(i) $x \wedge x \longrightarrow x$ *para qualquer* $x \in X$;

(ii) $\wedge(u_1, u_2, u_3, u_4) \longrightarrow \wedge(u_1, u_3, u_2, u_4)$ *para quaisquer* $u_1, u_2, u_3, u_4 \in F_2(X)$;

(iii) $(u_1, u_2, u_3, u_4)\wedge \longrightarrow (u_1, u_3, u_2, u_4)\wedge$ *para quaisquer* $u_1, u_2, u_3, u_4 \in F_2(X)$;

(*iv*) $u \wedge (\wedge(x, u_1, \cdots, u_n)) \longrightarrow \wedge(u, u_1, \cdots, u_n)$ *para quaisquer* $u, u_1, \cdots, u_n \in F_2(X)$ *e* $x \in X$ *tais que* $uR = x$*;*

(*v*) $((u_1, \cdots, u_n, x)\wedge) \wedge u \longrightarrow (u_1, \cdots, u_n, u)\wedge$ *para quaisquer* $u, u_1, \cdots, u_n \in F_2(X)$ *e* $x \in X$ *tais que* $uL = x$.

Usando o sistema de reescrita da proposição anterior não é difícil concluir que as seguintes regras de reescrita e as suas duais pertencem também a ρ:

(1) $u_1 \wedge (x \wedge u_2) \longrightarrow u_1 \wedge u_2$ para $x \in X$ e $u_1, u_2 \in F_2(X)$ tal que $u_2L = x$;

(2) $(u_1, \cdots, u_n, \wedge(x, v_1, \cdots, v_m))\wedge \longrightarrow (\wedge(u_1, v_1, \cdots, v_{m-1}), u_2, \cdots, u_n, v_m)$ para $x \in X$ e $u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m \in F_2(X)$ tal que $u_1R = x$.

Fixamos também uma ordem total $\preccurlyeq$ no conjunto X e restringimos as regras do teorema anterior indicadas em (*ii*) e (*iii*) ao seguinte conjunto e respectivo dual:

(3) $\wedge(u_1, u_2, u_3, u_4) \longrightarrow \wedge(u_1, u_3, u_2, u_4)$ para quaisquer $u_1, u_2, u_3, u_4 \in F_2(X)$ tais que $u_2L \preccurlyeq u_3L$.

Da Proposição 4.3 resulta facilmente o seguinte corolário:

Corolário 4.4. *Para qualquer ordem total fixada no conjunto* X*,* ρ *é a congruência gerada pelo sistema de reescrita constituído pelas regras* (1)*,* (2) *e* (3) *e respectivas regras duais.*

A proposição seguinte dá-nos um processo para resolvermos o problema da palavra para os pseudo-semi-reticulados livres.

Proposição 4.5. *O sistema de reescrita constituído pelas regras* (1)*,* (2) *e* (3) *e respectivas regras duais é noetheriano e localmente confluente. Logo, para quaisquer* $u, v \in F_2(X)$*,* $(u, v) \in \rho$ *se e só se a forma irredutível de* u *para este sistema de reescrita for igual à forma irredutível de* v*.*

Assim, para sabermos se dadas duas palavras $u, v \in F_2(X)$, (u, v) pertence ou não a ρ basta-nos determinar as formas irredutíveis de u e v, usando as regras (1), (2) e (3) e respectivas duais, e verificar se elas são iguais.

Finalizamos este artigo com algumas observações. A ordem total $\preccurlyeq$ e a restrição introduzida em (3) relativamente às regras de (*ii*) é somente uma questão técnica para garantir que o sistema de reescrita seja noetheriano. Observe-se que se usássemos as regras de (*ii*) na sua totalidade em vez das regras de (3), então o sistema de reescrita obtido não seria noetheriano já que poderíamos construir uma sequência infinita $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de palavras $u_n \in F_2(X)$ tais que $u_n \neq u_{n-1}$ onde u_n é obtido de u_{n-1} trocando sempre as mesmas duas subpalavras. Além disso, para mostrarmos se duas determinadas palavras u e v são ρ-equivalentes, basta-nos definir uma ordem total $\preccurlyeq$ no conjunto finito de todas as letras que ocorrem em u ou v.

Referências

[1] Auinger, K., On the lattice of existence varieties of locally inverse semigroups, *Canad. Math. Bull.* **37** (1994), 13–20.

[2] Hall, T. E., Identities for existence varieties of regular semigroups, *Bull. Austral. Math. Soc.* **40** (1989), 59–77.

[3] Jones, P., An introduction to existence varieties of regular semigroups, *Southeast Asian Bull. Math.* **19** (1995), 107–118.

[4] Kaďourek, J., e M. Szendrei, A new approach in the theory of orthodox semigroups, *Semigroup Forum* **40** (1990), 257–296.

[5] Meakin, J., e F. Pastijn, The structure of pseudosemilattices, *Algebra Universalis* **13** (1981), 355–372.

[6] Nambooripad, K. S. S., Structure of regular semigroups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **224** (1979).

[7] Nambooripad, K. S. S., Pseudo-semilattices and biordered sets, I, *Simon Stevin* **55** (1981), 103–110; II, *Simon Stevin* **56** (1982), 143–159; III, *Simon Stevin* **56** (1982), 239–256.

[8] Oliveira, L. A., *Varieties of Pseudosemilattices*, Tese de doutoramento.

[9] Oliveira, L. A., A solution to the word problem for free pseudosemilattices, *Semigroup Forum* **68** (2004), 246–267.

[10] Pastijn, F. J., Rectangular bands of inverse semigroups, *Simon Stevin* **56** (1982), 3–97.

[11] Schein, B. M., Pseudosemilattices and pseudolattices, *Amer. Math. Soc. Transl.* **199** (1983), 1–16.

Sobre as derivações da álgebra 3-Malcev M_8

Alexandre P. Pojidaev
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga 4, Novosibirsk, 630090, Russia,
app@math.nsc.ru

Paulo Saraiva
Faculdade de Economia
Universidade de Coimbra
3004-512 Coimbra–Portugal
psaraiva@fe.uc.pt

Resumo

Descrevemos as álgebras das derivações e das multiplicações à direita da álgebra 3-Malcev simples de dimensão 8, M_8. Definimos e determinamos a álgebra das quasi-derivações de M_8. Exibimos uma Z_3-gradação de M_8.

Palavras-chave: álgebra ternária de Malcev, álgebra das derivações, álgebra de Filippov (álgebra n-Lie)

1. INTRODUÇÃO

As álgebras ternárias de Malcev constituem um caso particular das álgebras n-árias de Malcev, originalmente definidas em [12], e estas surgem de um modo natural do teorema de classificação das álgebras com produto vectorial n-ário [2]. Entre outras coisas, tal resultado afirma que, quando $n = 2$, as únicas álgebras possíveis são a álgebra de Lie simples 3-dimensional $sl(2)$ e a álgebra de Malcev simples 7-dimensional C_7; quando $n \geq 3$, aquelas resumem-se à álgebra n-Lie simples $(n+1)$-dimensional (a qual é, por seu turno, uma generalização natural das álgebras de Lie para o caso de uma álgebra com multiplicação n-ária [5], hoje em dia conhecida por *álgebra de Filippov*) munida de um produto vectorial, sendo análoga a $sl(2)$, mas também a certas álgebras ternárias definidas sobre álgebras de composição. Podemos encontrar fórmulas explícitas para produtos vectoriais ternários (que se exibe em (4)), bem como para produtos vectoriais generalizados em [15], [2] e [8]. Uma visão interessante sobre este assunto (incluindo ainda uma perspectiva histórica) pode ser consultada em [4], enquanto que [3] sublinha a relação entre produtos vectoriais e álgebras de composição.

Provou-se em [12] que estas álgebras ternárias são álgebras ternárias de Malcev simples e centrais, que não se reduzem a uma álgebra 3-Lie sempre que a carcterística do corpo subjacente seja diferente de 2 e de 3 (mais geralmente, o teorema assegura que toda a álgebra com produto vectorial n-ário constitui uma álgebra n-ária de Malcev simples e central).

Ainda em [12], Pojidaev viria a provar que a classe das álgebras n-árias de Malcev possui duas propriedades interessantes:
1. É uma extensão da classe das álgebras n-Lie, *i.e.*, toda a álgebra n-Lie é uma álgebra n-ária de Malcev (o que generaliza o facto segundo o qual toda a álgebra de Lie é uma álgebra de Malcev);
2. Fixando uma componente arbitrária na multiplicação (*i.e.,* definindo uma nova operação, reduzida, no espaço vectorial A subjacente à álgebra n-ária de Malcev mediante $[x_1, \ldots, x_{n-1}]_a = [a, x_1, \ldots, x_{n-1}]$), obtemos uma álgebra $(n-1)$-ária de Malcev.

Até agora, o único exemplo de uma álgebra n-ária de Malcev simples é a acima mencionada álgebra ternária de Malcev simples e central definida sobre uma álgebra de composição de dimensão 8, que denotaremos por M.

A continuação da investigação das propriedades de M permitiu-nos obter alguns resultados que aqui expomos. Assim, para além de alguns resultados acreca das álgebras associativa e de Lie geradas pelas multiplicações à direita em M, concluímos que as álgebras associativas $Der(M)$ and $Innder(M)$ (*i.e.*, das derivações e das derivações internas de M) coincidem. É conhecido que, no caso das álgebras de Malcev, os operadores lineares da forma $[R_x, R_y] + R_{xy}$ (onde

$[.,.]$ denota o comutador) são derivações internas. Exibimos um teorema análogo a este para o caso da álgebra ternária de Malcev M. Nomeadamente, provamos que

$$Der(M) = \langle [R_{x,y}, R_{x,z}] + R_{x,[y,x,z]} : x, y, z \in M \rangle.$$

O propósito dos resultados obtidos é uma sua eventual utilização quando abordarmos, em investigações posteriores, o problema da classificação das representações irredutíveis de dimensão finita desta álgebra.

Após generalizarmos o conceito de quasi-derivação de um anel [1] para o caso de uma álgebra com multiplicação n-ária, conseguimos descrever a álgebra das quasi-derivações de M.

Por último, a generalização do conceito de gradação levou-nos à obtenção de uma $\mathbb{Z}_3$-gradação não trivial de M.

Os resultados referentes às secções 2 e 3 deste artigo serão publicados, juntamente com as respectivas demonstrações, em [11]. Por seu turno, aqueles que se incluem na última secção fazem parte de [10].

Começamos por recordar algumas definições. Seja Φ um anel comutativo e associativo com unidade. Uma Ω-*álgebra* sobre Φ é um módulo com unidade sobre Φ, no qual é possível definir um sistema de operações algébricas multilineares $\Omega = \{\omega_i : |\omega_i| = n_i \in N, i \in I\}$, onde $|\omega_i|$ denota a aridade de ω_i. É usual abreviar a designação de Ω-álgebra escrevendo apenas álgebra.

Uma *álgebra n-Lie* ($n \geq 3$) (ou *álgebra n-ária de Filippov*) é uma Ω-álgebra L com uma operação n-ária $[x_1, \dots, x_n]$ satisfazendo as identidades

$$[x_1, \dots, x_n] = sgn(\sigma)[x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}], \tag{1}$$

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n], \tag{2}$$

onde σ é uma permutação pertencente ao grupo simétrico S_n, cujo sinal é denotado por $sgn(\sigma)$. A relação (1) é dita *anticomutatividade*, sendo (2) conhecida por *identidade de Jacobi generalizada* (ou *identidade de Filippov*).

A seguinte função definida numa álgebra n-ária diz-se Jacobiano n-ário:

$$J(x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) =$$
$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] - \sum_{i=1}^{n} [x_1, \dots, [x_i, y_2, \dots, y_n], \dots, x_n].$$

Note que, numa álgebra n-Lie, $J(x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n)$ é anti-simétrico nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ e nas variáveis $y_2, \dots, y_n$, mas não na reunião de todos estes argumentos. Segue-se da definição que A é uma álgebra n-Lie se e só se

$$J(x_1, \dots, x_n; y_2, \dots, y_n) = 0$$

para todos os $x_1, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n \in A$.

Uma *álgebra n-ária de Malcev* ($n \geq 3$) é uma Ω-álgebra L munida de uma operação anti-comutativa n-ária $[x_1, \ldots, x_n]$ satisfazendo a identidade

$$\begin{aligned} & \sum_{i=2}^{n} [[z, x_2, \ldots, x_n], x_2, \ldots, [x_i, y_2, \ldots, y_n], \ldots, x_n] \\ & + \sum_{i=2}^{n} [[z, x_2, \ldots, [x_i, y_2, \ldots, y_n], \ldots, x_n], x_2, \ldots, x_n] \\ = \; & [[[z, x_2, \ldots, x_n], x_2, \ldots, x_n], y_2, \ldots, y_n] \\ & - [[[z, y_2, \ldots, y_n], x_2, \ldots, x_n], x_2, \ldots, x_n]. \end{aligned} \tag{3}$$

Em termos de multiplicações à direita, esta identidade equivale a:

$$R_x \left(\sum_{i=2}^{n} R_{x_2, \ldots, x_i R_y, \ldots, x_n} \right) + \left(\sum_{i=2}^{n} R_{x_2, \ldots, x_i R_y, \ldots, x_n} \right) R_x = R_x^2 R_y - R_y R_x^2,$$

onde $R_x = R_{x_2, \ldots, x_n}$ e $R_y = R_{y_2, \ldots, y_n}$ designam multiplicações à direita: $zR_x = [z, x_2, \ldots, x_n]$. Note ainda que podemos escrever (3) como se segue:

$$-J(zR_x, x_2, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_n) = J(z, x_2, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_n)R_x.$$

Uma versão do caso ternário de (3) pode escrever-se facilmente na forma:

$$[[x, y, z], [y, u, v], z] + [[x, y, z], y, [z, u, v]] + [[x, [y, u, v], z], y, z] + [[x, y, [z, u, v]], y, z]$$

$$= [[[x, y, z], y, z], u, v] - [[[x, u, v], y, z], y, z] \; .$$

No que se segue, assumiremos que Φ é um corpo de característica distinta de 2 e de 3, e denotaremos por A uma álgebra de composição sobre Φ com uma involução $^- : a \mapsto \bar{a}$ e unidade 1. A forma bilinear simétrica $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x})$ definida em A é suposta não-singular e, além disso, é possível definir a norma de cada $a \in A$ mediante a regra $n(a) = \langle a, a \rangle$. Se A for equipado com uma multiplicação ternária $[\cdot, \cdot, \cdot]$ através de

$$[x, y, z] = x\bar{y}z - \langle y, z \rangle x + \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z \; , \tag{4}$$

então A converte-se numa álgebra ternária de Malcev [12] que será denotada por $M(A)$. Se dim $A = 8$, então $M(A)$ não se reduz a uma álgebra 3-Lie e podemos denotá-la por M_8 ou mais simplesmente por M.

Embora, como se disse, não incluamos aqui as demonstrações dos resultados que provarmos, convém realçar que elas fazem uso das propriedades respeitantes às álgebras de composição (que surgem, *e.g.*, em [2], [14] e [12]). Sendo A

uma álgebra de composição nas condições acima descritas, eis algumas dessas propriedades:

$$\begin{aligned} a\overline{a}b &= a(\overline{a}b) = n(a)b = b\overline{a}a = b(\overline{a}a)\ ; \quad \overline{a}b\overline{a} = -n(a)\overline{b} + 2\langle a,b\rangle\,\overline{a}\ ; \\ a\overline{b}c + a\overline{c}b &= 2\langle b,c\rangle\, a\ ; \quad a(\overline{b}c) + b(\overline{a}c) = 2\langle a,b\rangle\, c\ ; \\ \langle ab,c\rangle &= \langle b,\overline{a}c\rangle = \left\langle a,c\overline{b}\right\rangle\ ; \quad \left\langle \overline{a},\overline{b}\right\rangle = \langle a,b\rangle\,,\ \langle \overline{a},b\rangle = \left\langle a,\overline{b}\right\rangle\ . \end{aligned} \tag{5}$$

Além disso, se $a,b,c \in A$ são ortonormados, então:

$$\overline{a}b\overline{a} = -\overline{b}\ ; \quad a\overline{b}c = -a\overline{c}b\ ; \quad a(\overline{b}c) = -b(\overline{a}c)\ . \tag{6}$$

Por último, recordamos que (4) é anti-comutativo, o que é consequência do facto de constituir um produto vectorial ternário [2].

2. ÁLGEBRAS DE MULTIPLICAÇÕES DE M

Seja A a álgebra de composição antes mencionada e admitamos que $1,a,b,c$ são vectores ortonormados de A. Escolhamos a seguinte base de M:

$$\{e_1 = 1,\ e_2 = a,\ e_3 = b,\ e_4 = ab,\ e_5 = c,\ e_6 = ac,\ e_7 = bc,\ e_8 = abc\}\ ,$$

a qual denotaremos por $\mathcal{E}$ e que será designada por *base canónica* de M. Para cada $i \in \{2,\ldots,8\}$, é possível escolher índices j,k,l,m,s,t, todos dependentes de i, tais que

$$e_i = e_1e_i = e_je_k = e_le_m = e_se_t \tag{7}$$

e

$$e_ke_m = e_t. \tag{8}$$

Definição: *Qualquer conjunto de equações* (7) que satisfaça (8) *é dito uma* partição da base $\mathcal{E}$. *O conjunto ordenado dos números naturais* $\{i,j,k,l,m,s,t\}$ *que corresponde a uma dada partição* (7) *de* $\mathcal{E}$ *é dito o* índice da partição. *Denotaremos por* $\mathcal{P}$ *o conjunto de todos os índices das partições de* $\mathcal{E}$.

Notemos que, se for dada uma partição (7), então

$$\begin{aligned} e_i &= e_1e_i = e_se_t = e_je_k = e_le_m, \\ e_i &= e_1e_i = e_le_m = e_se_t = e_je_k \end{aligned} \tag{9}$$

são também partições. Além disso, temos também as seguintes outras partições:

$$\begin{aligned}
e_j &= e_1e_j = e_se_m = e_ke_i = e_te_l, \\
e_k &= e_1e_k = e_ie_j = e_me_t = e_se_l, \\
e_l &= e_1e_l = e_me_i = e_ke_s = e_je_t, \\
e_m &= e_1e_m = e_ie_l = e_te_k = e_je_s, \\
e_s &= e_1e_s = e_le_k = e_te_i = e_me_j, \\
e_t &= e_1e_t = e_ie_s = e_ke_m = e_le_j.
\end{aligned} \tag{10}$$

Seja $M = M(A)$ a álgebra ternária de Malcev, simples, 8-dimensional sobre Φ e $\mathcal{R}$ o espaço vectorial gerado pelas multiplicações à direita em M. Sejam $Ass(\mathcal{R})$ e $Lie(\mathcal{R})$, respectivamente, a álgebra associativa e a álgebra de Lie geradas pelos elementos de $\mathcal{R}$. Por último, sejam $Der(M)$ e $Innder(M)$, respectivamente, as álgebras das derivações e das derivações internas de M. Recordemos que uma derivação se diz interna se pertencer à álgebra de Lie de transformações lineares $Lie(\mathcal{R})$. No que se segue, $\langle w_\upsilon : \upsilon \in \Upsilon \rangle$ denota o espaço vectorial sobre Φ gerado pela família de vectores $\{w_\upsilon : \upsilon \in \Upsilon\}$.

Proposição 2.1. *Com as notações acima descritas:*
1. $Ass(\mathcal{R}) = M_{8,8}(\Phi) = \langle \mathcal{R}^2 \rangle$;
2. $Lie(\mathcal{R}) \cong D_4$ e $Lie(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ *enquanto espaços vectoriais*;
3. $Der(M) \cong B_3$.

Ao longo da demonstração deste resultado prova-se que

$$Der(M) = \langle \Delta_{1l} - \Delta_{mi}, \Delta_{1l} - \Delta_{jt}, \Delta_{1l} - \Delta_{ks} : i,j,k,l,m,s,t \in \mathcal{P} \rangle \ , \tag{11}$$

onde $\Delta_{ij} = e_{ij} - e_{ji}$, denotando e_{ij} as habituais matrizes unidade. Tal caracterização de $Der(M)$ permitiu-nos exibir uma base para esta álgebra, *e.g.*:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \;=\; & \{\Delta_{23} - \Delta_{14}, \Delta_{24} + \Delta_{13}, \Delta_{25} - \Delta_{16}, \Delta_{26} + \Delta_{15}, \Delta_{27} + \Delta_{18}, \Delta_{28} - \Delta_{17}, \\
& \Delta_{34} - \Delta_{12}, \Delta_{35} - \Delta_{17}, \Delta_{36} - \Delta_{18}, \Delta_{37} + \Delta_{15}, \Delta_{38} + \Delta_{16}, \Delta_{45} - \Delta_{18}, \\
& \Delta_{46} + \Delta_{17}, \Delta_{47} - \Delta_{16}, \Delta_{48} + \Delta_{15}, \Delta_{56} - \Delta_{12}, \Delta_{57} - \Delta_{13}, \Delta_{58} - \Delta_{14}, \\
& \Delta_{67} + \Delta_{14}, \Delta_{68} - \Delta_{13}, \Delta_{78} + \Delta_{12}\} \ ,
\end{aligned} \tag{12}$$

levando-nos aos seguintes resultados.

Proposição 2.2. *A álgebra das derivações $Der(M)$ é gerada sobre Φ por $\mathcal{B}$, como descrito em* (12).

Teorema 2.3. *Todas as derivações de M são internas.*

O lema seguinte estabelece algumas relações na álgebra de Lie $Lie(\mathcal{R})$.

Lema 2.4. Seja $\mathcal{E}$ *a base canónica de* M. *Então,*

$$[[R_{x,y}, R_{x,z}], R_{y,z}] = 0 \ ,$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{E}$.

3. DERIVAÇÕES INTERNAS DE M

Seja A uma qualquer álgebra ternária, e consideremos $a \in A$ e $D \in Der(A)$ tais que $D(a) = 0$. É fácil observar que D constitui uma derivação da álgebra reduzida A_a. É também tarefa simples observar que, mesmo no caso em que $A = M$, existe $D \in Der(M)$ tal que $D(a) \neq 0$ para todo o $a \in M$, $a \neq 0$. Tome-se por exemplo $D = (\Delta_{14} - \Delta_{23}) + (\Delta_{56} + \Delta_{78})$.

Sejam $A = M$ e $a \in A$ tal que a álgebra quociente $A_a / \langle a \rangle$ é uma álgebra de Malcev simples (sabemos [13] que isto acontece quando, e.g., a é um elemento da base canónica). Seja $D \in Der(M)$ ([1]) com $D(a) \neq 0$. Uma vez que D é uma derivação da álgebra de Malcev reduzida M_a, e sabendo que toda a derivação desta álgebra é interna (*i.e.* pertence a $\langle [R_x, R_y] + R_{xy} \rangle$), temos

$$D = \sum_i ([R_{a,x_1^i}, R_{a,x_2^i}] + R_{a,[x_1^i,a,x_2^i]}).$$

Sabemos que, de um modo geral, um operador do tipo

$$[R_x, R_y] + R_{x \circ R_y},$$

onde $x = (x_2, \dots, x_n) \in L^{\times(n-1)}, y = (y_2, \dots, y_n) \in L^{\times(n-1)}$ e

$$x \circ R_y = \sum_{i=2}^{n} (x_2, \dots, x_i R_y, \dots, x_n) \in L^{\times(n-1)},$$

não é uma derivação de uma álgebra n-ária de Malcev L. Assim sendo, coloca-se uma questão natural: será que os operadores lineares da forma $[R_{z,x}, R_{z,y}] + R_{z,[x,z,y]}$ constituem derivações da álgebra ternária de Malcev M? A resposta é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Seja $M(A)$ uma álgebra ternária de Malcev definida numa álgebra de composição. Para quaisquer* $x, y, z \in A$ vale:

$$[R_{z,x}, R_{z,y}] + R_{z,[x,z,y]} \in Der(M(A)).$$

[1] Apesar de $Der(M) = Innder(M)$ (justificando o título da presente secção), preferimos usar a notação $Der(M)$ em vez de $Innder(M)$.

Demonstração: A linearização de $[R_{z,x}, R_{z,y}]+R_{z,[x,z,y]}$ por meio de z, permite-nos obter:

$$[R_{u,x}, R_{v,y}] + [R_{v,x}, R_{u,y}] + R_{u,[x,v,y]} + R_{v,[x,u,y]}.$$

Basta agora provar que este operador linear é uma derivação, para quaisquer $x, y, u, v \in \mathcal{E}$. Para tal, serão necessários alguns resultados auxiliares.

Lema 3.2. *Para vectores* $x, y, u, v \in \mathcal{E} \setminus \{e_1\}$ distintos, temos:

$$[R_{x,y}, R_{u,v}] \in Der(M).$$

Lema 3.3. *Para vectores* $x, y, u, v \in \mathcal{E}$ *distintos, temos*

$$[R_{x,y}, R_{u,v}] \in Der(M).$$

Nota: A condição de os elementos serem diferentes é essencial. De facto, temos por exemplo $[R_{1i}, R_{1j}] = \Delta_{ji} + 2\Delta_{sl} + 2\Delta_{mt} \notin Der(M)$ (caso contrário $\Delta_{sl} \in Der(M)$, o que é impossível).

Lema 3.4. *Para* $x, y, z \in \mathcal{E}$ *distintos, tem-se:*

$$[R_{x,y}, R_{x,z}] + R_{x,[y,x,z]} \in Der(M).$$

Lema 3.5. *Para* $x, y, u, v \in \mathcal{E}$ *distintos, tem-se:*

$$f(u, x, v, y) = R_{u,[x,v,y]} + R_{v,[x,u,y]} \in Der(M)\ .$$

Por último, a conclusão do Teorema 3.1 decorre dos Lemas 3.2.-3.5.

Seja $\mathcal{E}_d^4$ o conjunto de todos os 4-uplos distintos $(x, y, u, v) \in \mathcal{E}^{\times 4}$.

Corolário 1. $Der(M) = \langle [R_{x,y}, R_{u,v}] : (x, y, u, v) \in \mathcal{E}_d^4 \rangle$.

Corolário 2. $Der(M) = \langle [R_{x,y}, R_{x,z}] + R_{x,[y,x,z]} : x, y, z \in M \rangle$.

Corolário 3. *Para vectores* $x, y, u, v \in \mathcal{E}$ *, tem-se:*

$$R_{u,[v,x,y]} + R_{v,[u,x,y]} \in Der(M)\ ,$$

$$R_{u,[x,y,v]} + R_{v,[x,y,u]} \in Der(M)\ .$$

4. QUASI-DERIVAÇÕES DE M

Na presente secção iremos descrever a álgebra das quasi-derivações de M. De acordo com R. E. Block [1], um operador linear $D : A \longrightarrow A$ é dito uma *quasi-derivação* de um anel A, se for satisfeita a inclusão

$$[D,T] \in \mathcal{T}(A), \text{ para todo o } T \in \mathcal{T}(A) \ ,$$

onde $\mathcal{T}(A)$ designa o anel de Lie gerado pelas multiplicações à direita e à esquerda definidas por elementos de A.

No caso de álgebras n-árias, propomos o seguinte.

Definição. *Seja A uma álgebra n-ária anticomutativa com multiplicação $[\cdot,...,\cdot]$. Seja $\mathcal{R}$ o espaço vectorial gerado pelas multiplicações à direita $R_a = R_{a_2,...,a_n}$, $a_2,...,a_n \in A$, e designemos por $Ass\,(\mathcal{R})$ e $Lie\,(\mathcal{R})$, respectivamente, a álgebra associativa e a álgebra de Lie geradas por $\mathcal{R}$. Cada operador $D : A \longrightarrow A$ tal que*

$$[D, R_a] \in Lie\,(\mathcal{R})\,, \textit{para toda a } R_a \in Lie\,(\mathcal{R}) \ , \tag{13}$$

é dito uma quasi-derivação *de A. O conjunto das quasi-derivações da álgebra A é denotado por $QDer(A)$.*

Regressemos à álgebra ternária de Malcev 8-dimensional simples, M, sobre Φ e sejam $\mathcal{R}$, $Ass\,(\mathcal{R})$ e $L = Lie\,(\mathcal{R})$ as notações com os significados acima descritos (com M no lugar de A). O seguinte resultado descreve as quasi-derivações de M.

Teorema 4.1. $QDer(M) = \langle Id \rangle_\Phi \oplus L$.

5. $\mathbb{Z}_3$-GRADAÇÃO DE M

Nesta subsecção vamos obter a decomposição em espaços-peso (decomposição de Cartan) da álgebra 3-Macev simples, M, em relação a uma multiplicação à direita regular. Esta constitui o passo inicial para a dedução, de uma $\mathbb{Z}_3$-gradação em M_8.

No que se segue, L designa uma álgebra 3-Malcev de dimensão finita sobre um corpo de característica nula.

Consideremos a *decomposição de Fitting* de L em relação a uma multiplicação à direita em L, $R_{x,y}$, *i.e.*,

$$L = L_0 \oplus L_1 \ ,$$

(soma directa de subespaços vectoriais) onde os L_i, $i = 0, 1$ são invariantes sob a acção de $R_{x,y}$. Sabe-se que $R_{x,y}$ induz uma transformação nilpotente em L_0 e um isomorfismo em L_1 (ver [7]). Como é usual, os espaços L_0 e L_1 são denominados, respectivamente, por *componente nula* e *componente unidade* da decomposição de Fitting, sendo que

$$L_0 = \left\{ z \in L : z\,(R_{x,y})^i = 0, \text{ para algum } i \in \mathbb{N} \right\}$$

e

$$L_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} (R_{x,y})^i\,(L) \ .$$

Deste modo, L_0 é o espaço característico correspondente à raiz característica nula de $R_{x,y}$, sendo $\dim L_0$ a multiplicidade de tal raiz.

Por último, recordemos que uma multiplicação à direita $R_{x,y}$ é dita regular, se na decomposição de Fitting de L em relação a $R_{x,y}$, $\dim L_0$ é mínima. Neste caso, diremos que L_0 é um *subespaço de Cartan* de L.

No que se segue, suporemos que o corpo Φ é quadraticamente fechado.

Lema 5.1. Sejam $x, y \in M$. Então $R_{x,y}$ é regular se e só se $n_x n_y \neq \langle x, y\rangle^2$.

Teorema 5.2. Seja M a álgebra 3-Maltcev simples 8-dimensional sobre um corpo quadraticamente fechado Φ. Seja $R_{x,y}$ um elemento regular e

$$M = M_0 \oplus M_1$$

a decomposição de Fitting de M em relação a $R_{x,y}$. Então M_0 é uma subálgebra abeliana de M com dimensão 2, tendo-se a seguinte decomposição de Cartan de M

$$M = M_0 \oplus M_\alpha \oplus M_{-\alpha} \ , \tag{14}$$

onde $\alpha \in \Phi$ é tal que $vR_{x,y} = \pm\alpha v$ para qualquer $v \in M_{\pm\alpha}$.

Vamos de seguida deduzir certas propriedades auxiliares relativas aos espaços $M_{\pm\alpha}$.

Lema 5.3. Sejam dados $V = \langle 1, x, y, xy\rangle_\Phi$, $U = V^\perp$ e $M_\pm = M_{\pm\alpha} \cap U$. Então

1) $\langle M_\pm M_\pm, M_\mp\rangle = 0$;

2) $M_\pm M_\pm \subseteq \langle \alpha x \pm n_x y \mp xy\rangle_\Phi$;

3) $M_+ M_- \subseteq \langle -\alpha + y + xy\rangle_\Phi$;

4) $M_+M_+ + M_+M_- + M_-M_- \subseteq V$.

A noção de álgebra gradada pode ser generalizada para álgebras ternárias. No caso presente, interessam-nos as álgebras 3-Malcev.

Definição. *Uma álgebra* 3*-Malcev* L *com multiplicação* $[\cdot,\cdot,\cdot]$ *é dita* G-gradada *se o seu grupo aditivo se puder escrever como soma directa de grupos* L_α

$$L = \bigoplus_{\alpha \in G} L_\alpha \ ,$$

onde G é um semigrupo comutativo e

$$[L_\alpha, L_\beta, L_\gamma] \subseteq L_{\alpha+\beta+\gamma} \ ,$$

*para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in G$. Em tal caso, diz-se que L possui uma G-*gradação*.*

O resultado seguinte é o passo final na dedução de uma $\mathbb{Z}_3$-gradação de M.

Lema 5.4. Denotemos $M_{\pm\alpha}$ por $M_{\pm 1}$. Então

$$[M_i, M_j, M_k] \subseteq M_{i+j+k} \ ,$$

onde a soma $i+j+k$ é considerada módulo 3.

Corolário 5.5. A álgebra 3-Malcev M_8 pode ser equipada com uma $\mathbb{Z}_3$-gradação não trivial.

Demonstração. É uma consequência directa da decomposição de Cartan (14) para M_8 em conjunção com o lema anterior.

REFERENCES

[1] Block, R.E. Determination of the differentiable simple rings with a minimal ideal. Ann. Math. **1969**, 90(3), 433-459.

[2] Brown, R.B.; Gray, A. Vector cross products. Comment. Math. Helv. **1967**, 42, 222–236.

[3] Ebbinghaus; Hermes; *et al* Numbers. Graduate texts in Mathenmatics, 123, Springer-Verlag, **1991**.

[4] Eckmann, B. Continuous solutions of linear equations - an old problem, its history and its solution. Exposition. Math. **1991**, 9, 351-365.

[5] Filippov, V.T. n-Lie algebras. Sib. Math. J. **1985**, 26(6), 879-891; translation from Sib. Mat. Zh. 26(6), 126-140 (Russian).

[6] Humphreys, J.E. Introduction to Lie algebras and representation theory. Springer-Verlag, New York, **1972**.

[7] Jacobson, N. (1962), *Lie algebras*, Wiley-Interscience, New York.

[8] Massey, W.S. Cross products of vectors in higher dimensional Euclidean spaces. Am. Math. Monthly **1983,** 90, 697-701.

[9] Pojidaev, A.P.; Saraiva, P. On derivations of simple 8-dimensional ternary Malcev algebra. Abstracts of International Conference on Lie and Jordan algebras, their Representations and Applications, Guarujá, São Paulo, Brazil **2002**, May 13-18, 44-45.

[10] Pojidaev, A.P.; Saraiva, P. On some algebras related with the simple 8-dimensional ternary Malcev algebra M_8. Centro de Matemática da U. Coimbra, Dep. de Mat. U. Coimbra **2003**, Preprint 03-19, 1-34.

[11] Pojidaev, A.P.; Saraiva, P. On the derivations of the ternary Malcev algebra M_8. (aceite para publicação em Communications in Algebra).

[12] Pozhidaev, A.P. n-Ary Mal'tsev algebras. Algebra and Logic **2001**, 40(3), 170-182; translation from Algebra i Logika 40(3):309-329 (Russian).

[13] Saraiva, P. On some generalizations of Malcev algebras. Int. J. of Math., Game Th. and Algebra **2003**, 13(2), 89-108.

[14] Shestakov I.P.; Shirshov A.I.; Slin'ko A.M.; Zhevlakov K.A. Rings that are Nearly Associative, M.: Nauka. **1978**, English translation: Acad. Press N. Y. 1982.

[15] Zvengrowski, P. A 3-fold vector cross product in $\mathbb{R}^8$. Comm. Math. Helv. **1966**, 40, 149-152.

Módulos com injectividade fraca

Catarina Santa-Clara[a]

[a]Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Rua Ernesto de Vasconcelos, Bloco C1, 1749-016 Lisboa, Portugal, e-mail: cgomes@fc.ul.pt

Resumo

Um módulo M é c-injectivo se, para qualquer submódulo fechado N de M, qualquer homomorfismo de N para M puder ser estendido a um homomorfismo de M para M. Fazemos um levantamento de exemplos conhecidos e de propriedades gerais para esta classe de módulos (trabalho em colaboração com P.F.Smith).

Palavras-chave: módulos injectivos, módulos extensíveis, módulos auto-c-injectivos.

1 Módulos injectivos

Os grupos divisíveis, e mais tarde os módulos injectivos, foram introduzidos por Baer [2], Eckmann e Schopf [5]. O conceito de injectividade e algumas das suas generalizações (nomeadamente, as noções de módulo auto-injectivo, contínuo, quase-contínuo e extensível) têm atraído bastante interesse ao longo dos anos.

Os objectos injectivos são 'completos' no seguinte sentido: qualquer homomorfismo parcial para um objecto injectivo pode ser estendido a um homomorfismo total. Eis alguns exemplos de objectos injectivos em outras categorias que não a dos módulos:

Categoria dos espaços de Banach: O corpo dos números reais é injectivo (Teorema de Hahn-Banach).

Categoria dos espaços topológicos normais: O intervalo $[0, 1]$ é injectivo (Teorema de Tietze).

Categoria das Álgebras de Boole: As Álgebras de Boole completas são injectivas.

Categoria dos conjuntos parcialmente ordenados: As completações de Dedekind-MacNeille são os invólucros injectivos dos conjuntos parcialmente ordenados.

Na categoria dos módulos, os espaços vectoriais e os grupos divisíveis são exemplos de módulos injectivos; e qualquer módulo é K-injectivo, para um corpo K.

Sobre a existência de (muitos) módulos injectivos, sabe-se que qualquer módulo M pode ser mergulhado num módulo injectivo minimal - o seu invólucro injectivo $E(M)$. Por exemplo, para um domínio de integridade comutativo R, $E(R_R)$ é o seu corpo de fracções.

As seguintes propriedades gerais são bem conhecidas:

- O produto directo de módulos injectivos é injectivo (este resultado pode passar para outras categorias).
- A soma directa de módulos injectivos não tem de ser injectiva.

Levanta-se então a seguinte questão: como é que se comportam as somas directas de módulos injectivos?

Problema em aberto. *Quando é que os módulos (fracamente) injectivos se decompõem em somas directas de módulos indecomponíveis?*

Um resultado fundamental, no caso dos módulos injectivos, é o seguinte:

Teorema. *[11, 14] Sobre um anel Noetheriano à direita, qualquer módulo injectivo decompõe-se numa soma directa de módulos indecomponíveis.*

Este resultado foi generalizado para módulos extensíveis por Okado [13, Teorema 4] (veja-se [4, 8.2]).

2 Generalizações de injectividade

Temos a seguinte hierarquia de generalizações do conceito de injectividade:

INJECTIVO $\Rightarrow$ AUTO-INJECTIVO $\Rightarrow$ CONTÍNUO $\Rightarrow$ QUASE-CONTÍNUO $\Rightarrow$ EXTENSÍVEL $\Rightarrow$ C-INJECTIVO

Questão. *Porquê generalizar?*

As generalizações do conceito de injectividade têm as seguintes motivações:
Motivação externa - Exemplo: Os módulos contínuos surgiram no seguimento do trabalho de Von Neumann sobre geometrias contínuas (anos 30).
Motivação interna - Construções com injectivos enfraquecem a injectividade. Exemplo: somas directas de injectivos não têm de ser injectivas.

3 Definições

Fixe-se um anel com identidade R e designem-se por módulos os R-módulos unitários à direita.

Se N for um submódulo de um módulo M, escreve-se $N \leq M$. Um submódulo N de M é *essencial* em M, se $N \cap L \neq 0$, para qualquer $0 \neq L \leq M$. Se qualquer submódulo não nulo de M for essencial em M, M diz-se *uniforme*. Um submódulo K de M é *fechado* em M, desde que K não tenha extensões essenciais próprias em M. Dado um submódulo N de M, um submódulo K de M chama-se um *complemento* de N em M se K for maximal na colecção de submódulos L de M tal que $L \cap N = 0$. Um submódulo K de M diz-se um *complemento* em M se for complemento de algum submódulo de M. Por [4, 1.10], um submódulo de um módulo M é fechado em M se e só se for um complemento em M.

Um módulo M é *extensível*, ou um *módulo CS*, se qualquer submódulo de M for essencial numa parcela directa de M ou, equivalentemente, se qualquer submódulo fechado de M for uma parcela directa de M. Um módulo M diz-se *quase-contínuo* se for extensível e $M_1 \oplus M_2$ for uma parcela directa de M, sempre que M_1 e M_2 forem parcelas directas de M tais que $M_1 \cap M_2 = 0$. Um módulo M é um módulo *contínuo* se for extensível e qualquer submódulo isomorfo a uma parcela directa de M também for uma parcela directa de M.

Dado um módulo N, um módulo M é N*-injectivo* se qualquer homomorfismo $\alpha : A \to M$, onde A é um submódulo arbitrário de N, puder ser estendido a um homomorfismo $\beta : N \to M$. M é *injectivo* se for N-injectivo, para qualquer módulo N. M é *auto-injectivo* ou *quase-injectivo* se for M-injectivo.

Dado um módulo M, o *submódulo singular* $Z(M)$ de M é definido por

$$Z(M) = \{\, m \in M \mid mE = 0,$$

$$\text{para algum ideal direito essencial } E \text{ de } R\,\}.$$

O *segundo submódulo singular* $Z_2(M)$ de M é o submódulo de M que contém $Z(M)$ e é tal que $Z_2(M)/Z(M)$ é o submódulo singular do módulo quociente $M/Z(M)$. Observe-se que, se R for um domínio comutativo, então, para qualquer R-módulo M, $Z_2(M) = Z(M)$ é o submódulo de torção usual de M. Um facto básico sobre módulos extensíveis é o seguinte: $Z_2(M)$ é parcela directa de M, para qualquer módulo extensível M [4, 7.11].

Para outras definições e notações standard, veja-se [1, 4, 12, 20]. Para a teoria de domínios de Dedekind, veja-se, por exemplo, [17, 22].

4 Módulos auto-c-injectivos

Recorde-se que um módulo M é auto-injectivo se qualquer homomorfismo $\alpha : A \to M$, onde A é um submódulo arbitrário de M, puder ser estendido a um homomorfismo $\beta : N \to M$. Os módulos contínuos e quase-contínuos constituem outras classes de módulos que podem ser caracterizados pelo levantamento de homomorfismos de certo tipo de submódulos para o próprio módulo, como foi provado em [19]. De facto, no artigo citado, P. F. Smith and A. Tercan estudaram a seguinte propriedade, para um módulo M:

(P_n) Para qualquer submódulo K de M que se possa escrever como uma soma directa finita $K_1 \oplus \cdots \oplus K_n$ de complementos $K_1, \cdots, K_n$ de M, todo o homomorfismo $\alpha : K \to M$ pode ser estendido a um homomorfismo $\beta : M \to M$.

e provaram que um módulo M é quase-contínuo se e só se satisfizer (P_n), para algum (todos) $n \geq 2$.

Seguindo uma ideia de [3], interessa-nos estudar os módulos *auto-c-injectivos*, i.e., módulos M que satisfazem (P_1). Os módulos extensíveis são um exemplo de módulos com esta propriedade. Os módulos auto-c-injectivos são também um caso particular dos módulos quase-injectivos generalizados estudados em [21]. Recorde-se que um módulo M se diz *GQ-injectivo* (quase-injectivo generalizado), se, para qualquer submódulo N isomorfo a um submódulo fechado K de M, qualquer homomorfismo de N para M puder ser estendido a M.

Sejam M_1 e M_2 módulos. O módulo M_2 é M_1-*c-injectivo* se qualquer homomorfismo $\alpha : K \to M_2$, onde K é um submódulo fechado de M_1, puder ser prolongado por um homomorfismo $\beta : M_1 \to M_2$. Claramente, se M_2 for M_1-injectivo, então M_2 é M_1-c-injectivo.

Um módulo M diz-se *auto-c-injectivo* se for M-c-injectivo.

Lema 1. *[15, Lema 2.1] Seja M um módulo e seja K um submódulo fechado de M. Se K for M-c-injectivo, então K é uma parcela directa de M.*

Proposição 2. *[15, Proposição 2.2] As seguintes propriedades são equivalentes, para um módulo M.*

(i) M é extensível.

(ii) qualquer módulo é M-c-injectivo.

(iii) qualquer submódulo de M é M-c-injectivo.

Em particular, pela Proposição 2, qualquer módulo extensível é auto-c-injectivo. Mas nem todo o módulo auto-c-injectivo é extensível. Considerem-se, por exemplo, os $\mathbb{Z}$-módulos $M_1 := \mathbb{Q}$ e $M_2 := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para um primo p. O $\mathbb{Z}$-módulo $M_1 \oplus M_2$ é auto-c-injectivo mas não é extensível [19]: $(1 + p\mathbb{Z}, q)\mathbb{Z}_p$ é submódulo fechado mas não é parcela directa, para todo o $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Este facto será generalizado pelo Teorema 12.

Seguem-se algumas propriedades gerais da c-injectividade.

Lema 3. *[15, Lema 2.4] Sejam M_1 e M_2 módulos. Se M_2 for M_1-c-injectivo, então, para qualquer submódulo fechado N de M_1, M_2 é N-c-injectivo e (M_1/N)-c-injectivo.*

Lema 4. *[15, Lema 2.5] Sejam M e $\{ N_i \mid i \in I \}$ módulos. Então $\Pi_{i\in I} N_i$ é M-c-injectivo se e só se N_i for M-c-injectivo, para todo $i \in I$.*

Os módulos M_1 e M_2 são *relativamente c-injectivos* se M_i for M_j-c-injectivo, para quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$.

Corolário 5. *[15, Corolário 2.6] Sejam M_1 e M_2 módulos. Se $M_1 \oplus M_2$ for auto-c-injectivo, então M_1 e M_2 são ambos auto-c-injectivos e relativamente c-injectivos. Em particular, uma parcela directa de um módulo auto-c-injectivo é auto-c-injectiva.*

A recíproca do Corolário 5 não é válida, em geral. Considerem-se, por exemplo, os $\mathbb{Z}$-módulos $M_1 := \mathbb{Z}$ e $M_2 := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, para um primo p. Tanto M_1 como M_2 são uniformes, logo são auto-c-injectivos e relativamente c-injectivos. Será provado no Corolário 9 que $M_1 \oplus M_2$ não é auto-c-injectivo.

Note-se que este exemplo também mostra que [3, Teorema 2] não é válido. O resultado citado diz que, se M_1 for um módulo quase-contínuo com dimensão uniforme finita e M_2 for auto-c-injectivo e M_1-injectivo, então $M_1 \oplus M_2$ é auto-c-injectivo.

Teorema 6. *[15, Teorema 2.8] Sejam $M_1, \ldots, M_n$ $(n \in \mathbb{N})$ módulos relativamente injectivos. Então $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ é auto-c-injectivo se e só se M_i for auto-c-injectivo, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

5 Módulos c-injectivos sobre domínios comutativos

O resultado seguinte generaliza [3, Teorema 1].

Teorema 7. *[15, Teorema 3.1] Seja R um domínio de Dedekind que não seja um corpo. Então qualquer R-módulo livre auto-c-injectivo é finitamente gerado.*

Os próximos resultados permitem encontrar classes de exemplos de módulos que são ou não são auto-c-injectivos.

Teorema 8. *[15, Teorema 3.4] Seja A um ideal não nulo de um domínio de integridade comutativo R tal que $A \leq cR$, para algum $c \in R$ que não seja uma unidade. Então o R-módulo $M := R \oplus (R/A)$ não é auto-c-injectivo.*

Corolário 9. *[15, Corolário 3.5] Seja R um domínio de integridade comutativo e seja $c \in R \setminus \{0\}$ um elemento que não seja uma unidade. Então o R-módulo $R \oplus (R/cR)$ não é auto-c-injectivo.*

Teorema 10. *[15, Teorema 3.9] Seja R um domínio de integridade comutativo Noetheriano que não seja um corpo, e seja U um R-módulo simples. Então o R-módulo $M := R \oplus U$ não é auto-c-injectivo.*

Corolário 11. *[15, Corolário 3.10] Seja R um domínio de integridade comutativo Noetheriano que não seja um corpo, seja M_1 um R-módulo livre não nulo e seja M_2 um R-módulo semisimples não nulo. Então o R-módulo $M_1 \oplus M_2$ não é auto-c-injectivo.*

Teorema 12. *[15, Teorema 3.14] Seja R um domínio de Dedekind, seja M_1 um R-módulo injectivo indecomponível e livre de torção e seja M_2 um R-módulo cíclico de torção. Então o R-módulo $M_1 \oplus M_2$ é auto-c-injectivo.*

6 Alguns exemplos (na classe dos grupos abelianos)

Exemplos. *Seja $R = \mathbb{Z}$ e seja $p \in \mathbb{Z}$ primo.*
[12, página 19] $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ é **auto-injectivo**, *$\forall m \in \mathbb{N}$.*
[7, Corolário 23] $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ é **extensível** *sse $|m - n| \leq 1$.*
[15, Teorema 4.1] $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ é **auto-c-injectivo**, *$\forall m, n \in \mathbb{N}$.*
[15, Exemplo 4.2] $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z}$ não é auto-c-injectivo.

Observe-se que o terceiro exemplo mostra que [3, Proposição 1, Corolário 2] não são válidos. Os resultados anteriores levam a propôr a seguinte questão.

Questão. *O $\mathbb{Z}$-módulo $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^{(s)} \oplus (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^{(t)}$ é auto-c-injectivo, para quaisquer $m, n, s, t \in \mathbb{N}$?*

Alguns cálculos já efectuados (em colaboração com Patrick F. Smith), permitem concluir que, dados $m, n, s, t \in \mathbb{N}$ arbitrários, se M for o $\mathbb{Z}$-módulo acima mencionado, então qualquer homorfismo $\alpha : K \to M$, onde K é um submódulo fechado **uniforme** de M, pode ser prolongado por um homomorfismo $\beta : M \to M$, mas a questão geral permanece em aberto.

7 Produtos directos de módulos simples sobre anéis de Dedekind

Os módulos auto-c-injectivos satisfazem algumas propriedades dos módulos extensíveis, como por exemplo o Teorema 7, mas a classe dos módulos auto-c-injectivos é bastante maior que a classe dos extensíveis. Mostraremos nesta secção que, se R for um domínio de Dedekind que contenha uma colecção infinita de ideais maximais P_i $(i \in I)$ e se $M = \Pi_{i \in I}(R/P_i)$ for o R-módulo que é produto directo dos R-módulos simples R/P_i $(i \in I)$, então M é um módulo auto-c-injectivo cujo submódulo de torção $Z_2(M)$ não é uma parcela directa de M (ver Corolário 14 e Teorema 15), ao contrário do que acontece com os módulos extensíveis [4, 7.11]. Além disso, no caso de $R = \mathbb{Z}$, M não é soma directa de módulos indecomponíveis, contrastando também com o que se passa na teoria dos módulos extensíveis [4, 8.2].

Proposição 13. *[16, Proposição 2] Seja R um domínio de integridade comutativo que contenha uma colecção infinita de ideais maximais finitamente gerados distintos P_i $(i \in I)$ tais que $\cap_{i \in J} P_i = 0$, para qualquer subconjunto infinito J de I. Considere-se o R-módulo $M = \Pi_{i \in I}(R/P_i)$ que é produto directo dos R-módulos simples R/P_i $(i \in I)$. Então o submódulo de torção de M não é parcela directa de M.*

Seja R um domínio de integridade comutativo com corpo de fracções Q. Para qualquer ideal A de R, seja $A^* = \{ q \in Q \mid Aq \subseteq R \}$. Então A^* é um R-submódulo de Q, $R \subseteq A^*$ e $AA^* \subseteq R$. O ideal A diz-se *invertível* se $AA^* = R$.

Corolário 14. *[16, Corolário 3] Seja R um domínio de integridade comutativo Noetheriano que contenha uma colecção infinita de ideais maximais invertíveis distintos P_i $(i \in I)$. Considere-se o R-módulo $M = \Pi_{i \in I}(R/P_i)$ que é produto directo dos R-módulos simples R/P_i $(i \in I)$. Então o submódulo de torção de M não é parcela directa de M.*

Teorema 15. *[16, Teorema 6] Seja R um domínio de Dedekind. Então qualquer produto directo de R-módulos simples é auto-c-injectivo.*

Por um resultado já citado de Okado [13, Teorema 4] (veja-se [4, 8.2]), se R for um anel Noetheriano à direita, então qualquer R-módulo à direita extensível é soma directa de submódulos indecomponíveis. Seja M o $\mathbb{Z}$-módulo $\Pi_p(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p)$, onde o produto directo é tomado sobre uma família infinita de primos p. Pelo Teorema 15, M é auto-c-injectivo e, pelo Corolário 14, o submódulo de torção T de M não é uma parcela directa de M. Suponhamos que $M = \oplus_\lambda M_\lambda$ é uma soma directa de submódulos indecomponíveis M_λ ($\lambda \in \Lambda$). Por um Teorema de Kulikov [10] (veja-se [6, Corolário 27.4]), M_λ ou é módulo de torção ou é livre de torção, para cada $\lambda \in \Lambda$. Segue-se que T é parcela directa de M, contrariando o já sabido. Então M não é soma directa de submódulos indecomponíveis.

Agradecimentos: Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do projecto POCTI-ISFL-1-143 'Fundamental and Applied Algebra' do Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, financiado pela FCT e pelo FEDER.

Referências

[1] F. W. Anderson, and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag GTM, New York, 1992.

[2] R. Baer, Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group, *P*roc. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 800–806.

[3] C. Çelik, Modules satisfying a lifting condition, *Turkish J. Math.* **18** (1994), 293–301.

[4] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, and R. Wisbauer, *Extending Modules*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman, Harlow, 1994.

[5] B. Eckmann, and A. Schopf, Uber injective Moduln, *A*rch. Math. **4** (1953), 75–78.

[6] L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, Vol I, Academic Press, New York, 1970.

[7] M. A. Kamal, and B. J. Müller, The structure of extending modules over Noetherian rings, *Osaka J. Math.* **25** (1988), 539–551.

[8] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups*, University of Michigan Press, 1962.

[9] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[10] L. Ya. Kulikov, On the theory of abelian groups of arbitrary cardinality [Russian], *Mat. Sb.* **9** (1941), 165–182.

[11] E. Matlis, Injective modules over Noetherian rings, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 511–528.

[12] S. H. Mohamed, and B. J. Müller, *Continuous and Discrete Modules*, London Math. Soc. Lecture Notes **147**, Cambridge University Press, London, 1990.

[13] M. Okado, On the decomposition of extending modules, *Math. Japonica* **29** (1984), 939–941.

[14] Z. Papp, On algebraically closed modules, *Publ. Math. Debrecen* **6** (1959), 311–327.

[15] C. Santa-Clara and P.F. Smith, Modules which are self-injective relative to closed submodules, in "Algebra and its Applications"(Athens, Ohio, 1999), *Contempary Mathematics* **259**, Amer. Math. Soc., Providence, 2000, 487–499.

[16] C. Santa-Clara and P.F. Smith, Direct Products of Simple Modules Over Dedekind Domains, *Archiv der Mathematik* **82** (2004), 8–12.

[17] D. W. Sharpe, and P. Vamos, *Injective Modules*, Cambridge University Press, 1972.

[18] P.F. Smith, Commutative domains whose finitely generated projective modules have an injectivity property, in "Algebra and its Applications"(Athens, Ohio, 1999), *Contempary Mathematics* **259**, Amer. Math. Soc., Providence, 2000, 529–546.

[19] P. F. Smith, and A. Tercan, Continuous and quasi-continuous modules, *Houston J. Math.* **18** (1992), 339–348.

[20] R. Wisbauer, *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading, 1991.

[21] R. Yue Chi Ming, On quasi-injectivity and von Neumann regularity, *Monatsh. Math.* **95** (1983), 25–32.

[22] O. Zariski, and P. Samuel, *Commutative Algebra*, volume I, Van Nostrand, Princeton, 1958.

Uma Abordagem Categorial da Lógica das Implicações

M. Sobral[a], L. Sousa[b]

[a]Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, e-mail: sobral@mat.uc.pt

[b] ESTV, Instituto Politécnico de Viseu, e-mail: sousa@mat.estv.ipv.pt

Resumo

Uma lógica correcta e completa para implicações, que é uma extensão natural da lógica equacional de Birkhoff, é apresentada em [1]. Ela tem por base uma lógica da injectividade, com um sistema dedutivo para epimorfismos que é correcto e também completo, sob condições de finitude adequadas. Deste sistema geral vem não só inspiração para a definição da lógica para implicações mas também uma forma de provar a sua completude. Neste artigo pretendemos descrever o caminho percorrido, salientando a utilidade da abordagem geral bem como das técnicas utilizadas.

Palavras-chave: Variedades, quasi-variedades, epimorfismos, objectos finitamente apresentáveis, lógica equacional, lógica implicacional.

1 Introdução

Versões categoriais da Lógica Equacional e da Lógica Implicacional têm como base os seguintes factos:

- equações e implicações podem ser interpretadas como morfismos especiais em categorias especiais;
- a sua satisfação pode ser expressa em termos de injectividade.

Consideremos uma assinatura $\Sigma = \cup \Sigma_n$, onde Σ_n é o conjunto dos símbolos de operação n-ária. Denotamos por $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ a categoria das Σ-álgebras e homomorfismos, e por $\mathbf{Alg}(\Sigma, S)$ a subcategoria plena das Σ-álgebras que satisfazem um conjunto S de equações ou de implicações.

Exemplo 1.1. Para a assinatura Σ

$$\Sigma_2 = \{\cdot\}, \ \ \Sigma_n = \emptyset \ \text{ se } \ n \neq 2$$

e os conjuntos (singulares)

$$E = \{x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\}$$

$$I = \{x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z\},$$

$\mathbf{Alg}(\Sigma)$ é a categoria dos conjuntos com uma operação binária, $\mathbf{Alg}(\Sigma, E)$ é a categoria dos semigrupos e $\mathbf{Alg}(\Sigma, E, I)$ a categoria dos semigrupos canceláveis à esquerda.

Observamos que $u = x{\cdot}(y{\cdot}z)$ e $v = x{\cdot}(y{\cdot}z)$ são elementos da álgebra dos termos $Ter_\Sigma(X)$, nas variáveis $X = \{x, y, z\}$, *a álgebra livre gerada por* X. Associado à congruência $\sim$ gerada por (u, v) em $Ter_\Sigma(X)$, temos o homomorfismo quociente $e : Ter_\Sigma(X) \to Ter_\Sigma(X)/\sim$. Desta forma, descrevemos $E = \{u = v\}$ através de um homomorfismo sobrejectivo. Além disso, uma Σ-álgebra $(A, \cdot)$ satisfaz E se e só se para todo o homomorfismo $f : Ter_\Sigma(X) \to A$ existe um homomorfismo g tal que $g \cdot e = f$

$$\begin{tikzcd} Ter_\Sigma(X) \arrow[rr, "e"] \arrow[dr, "f"'] & & Ter_\Sigma(X)/\sim \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

o que significa que $(A, \cdot)$ *é injectiva relativamente a* e. Concluimos assim que, no que respeita à equação $u = v$, *Satisfação = Injectividade*, isto é, para toda a Σ-álgebra $(A, \cdot)$,

$$(A, \cdot) \in \mathbf{Alg}(\Sigma, E) \Leftrightarrow (A, \cdot) \text{ é } \{e\}\text{-injectiva}$$

De forma análoga, podemos associar a $I = \{x \cdot y = x \cdot z \Rightarrow y = z\}$ um homomorfismo sobrejectivo. Consideremos a congruência $\sim_{\mathcal{P}}$ gerada por $\mathcal{P} = \{(x \cdot y, x \cdot z)\}$ e a congruência $\sim_{\mathcal{Q}}$ gerada por $\mathcal{Q} = \{(x \cdot y, x \cdot z), (y, z)\}$ em $Ter_\Sigma(X)$. Se $q_{\mathcal{P}}$ e $q_{\mathcal{Q}}$ são os homomorfismos quocientes respectivos, existe um e um só homomorfismo $e_I : Ter_\Sigma(X)/\sim_{\mathcal{P}} \to Ter_\Sigma(X)/\sim_{\mathcal{Q}}$ tal que $e_I \cdot q_{\mathcal{P}} = q_{\mathcal{Q}}$. Temos então que uma álgebra satisfaz a implicação referida se e só se é injectiva relativamente a este homomorfismo sobrejectivo:

$$(A, \cdot) \in \mathbf{Alg}(\Sigma, I) \Leftrightarrow (A, \cdot) \text{ é } \{e_I\}\text{-injectiva}$$

De uma forma geral, dada uma assinatura Σ finitária de uma espécie, uma equação é um par (u, v) de elementos de $Ter_\Sigma(X)$ para um conjunto finito de variáveis X. Usaremos a notação $u = v$ para a fórmula de primeira ordem $(\forall X)(u = v)$.

Para um conjunto de equações E, seja $\sim$ a congruência gerada por E em $Ter_\Sigma(X)$ e $e : Ter_\Sigma(X) \to Ter_\Sigma(X)/\sim$ o respectivo homomorfismo quociente. Para $A \in \mathbf{Alg}(\Sigma)$,

$$A \in \mathbf{Alg}(\Sigma, E) \Leftrightarrow A \text{ é } \{e\}\text{-injectiva}$$

Reciprocamente, *homomorfismos sobrejectivos de domínio livre* definem conjuntos (em geral infinitos e que podem não ser finitamente gerados) de equações: um homomorfismo $e : Ter_\Sigma(X) \to Q$ define no domínio a congruência *par núcleo*

$$ParNuc(e) = \{(u, v) | e(u) = e(v)\},$$

que denotamos por $\sim$. Se o morfismo é sobrejectivo, o codomínio Q é isomorfo à álgebra quociente $Ter_\Sigma(X)/\sim$. Além disso

$$A \in \mathbf{Alg}(\Sigma) \text{ satisfaz } ParNuc(e) \Leftrightarrow A \text{ é } \{e\}\text{-injectiva.}$$

Sejam $\mathcal{P} = \{u_i = v_i,\ i \in I\}$ e $\mathcal{Q} = \{s_j = t_j,\ j \in J\}$ conjuntos de equações das quais $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ exprimem a respectiva conjunção.

Por

$$I \equiv (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}),$$

denotamos uma implicação onde $\mathcal{P}$ é a premissa e $\mathcal{Q}$ a conclusão. Ela define um homomorfismo sobrejectivo

$$e : Ter_\Sigma(X)/\sim_{\mathcal{P}} \to Ter_\Sigma(X)/\sim_{\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}}$$

e

$$A \in \mathbf{Alg}(\Sigma) \text{ satisfaz } I \Leftrightarrow A \text{ é } \{e\}\text{-injectiva}$$

Por outro lado, *homomorfismos sobrejectivos* definem implicações: dado um homomorfismo sobrejectivo $e : B \to C$ seja

$$\varepsilon_B : Ter_\Sigma(B) \to B$$

o homomorfismo que estende a identidade $1_B : B \to B$ à álgebra dos termos cujas variáveis são os elementos de B, isto é o único homomorfismo tal que $\varepsilon_B(x) = x$ para todo o $x \in B$. Consideremos a implicação

$$I \equiv (ParNuc(\varepsilon_B) \Rightarrow ParNuc(e \cdot \varepsilon_B)) \tag{1}$$

Então

$$A \in \mathbf{Alg}(\Sigma) \text{ satisfaz } I \Leftrightarrow A \text{ é } \{e\}\text{-injectiva},$$

podendo $ParNuc(\varepsilon_B)$ e $ParNuc(e \cdot \varepsilon_B)$ em (1) ser substituídas por geradores.

Observações 1.2. 1. O functor de esquecimento na categoria dos conjuntos, $U : \mathbf{Alg}(\Sigma) \to \mathcal{C}onj$, tem um adjunto à esquerda $\Phi : \mathcal{C}onj \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ onde $\Phi(X) = Ter_\Sigma(X)$ é a álgebra livre gerada por X. Na adjunção $\Phi \dashv U(\eta, \varepsilon)$, $\eta_X : X \to U\Phi(X)$ é a inserção de variáveis e $\varepsilon_A : \Phi U(A) \to A$ é o homomorfismo definido por $\varepsilon_A(x) = x$, para todo o $x \in A$.

2. Quando uma imersão $E : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tem um adjunto à esquerda R diz-se que a subcategoria $\mathcal{B}$ é reflexiva em $\mathcal{A}$ e as componentes da unidade $r_A : A \to ER(A)$ chamam-se as reflexões: elas dão-nos para cada $A \in \mathcal{A}$ o "melhor"objecto em $\mathcal{B}$ que pode ser construído a partir de A. Isto significa que todo o morfismo $f : A \to E(B)$ se factoriza de forma única através de r_A. No exemplo 1.1 a imersão $E : \mathbf{Alg}(\Sigma, E) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ tem um adjunto à esquerda e as reflexões são definidas, para cada Σ-álgebra B, pela projecção canónica $r_B : B \to B/\sim$, sendo $\sim$ a congruência em B gerada pelos pares $(x \cdot (y \cdot z), (x \cdot y) \cdot z)$, para todo o $x, y, z \in B$.

3. Na última secção vamos considerar apenas implicações da forma

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_k) \left((\bigwedge_{i=1}^{n} u_i = v_i) \Rightarrow (u = v) \right)$$

isto é, expressões que envolvem apenas um número finito de equações e um número finito de variáveis.

A satisfação de equações e de implicações, interpretada como injectividade relativamente a homomorfismos sobrejectivos, envolve a consideração de congruências que podem não ser finitamente geradas, como já referimos. Tendo como objectivo definir um sistema dedutivo completo é natural considerar apenas homomorfismos sobrejectivos entre álgebras finitamente apresentáveis.

Recordamos que as álgebras finitamente apresentáveis da categoria $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ são isomorfas a álgebras quocientes da forma $Ter_\Sigma(W)/\sim_\mathcal{P}$, onde W é um conjunto finito de variáveis e $\mathcal{P}$ é um conjunto finito de equações em $Ter_\Sigma(W)$. Portanto, se o domínio e o codomínio de um homomorfismo sobrejectivo e são álgebras finitamente apresentáveis, a $\{e\}$-injectividade pode ser expressa por uma implicação, ou um número finito de implicações no sentido de 1.2.3, envolvendo um número finito de variáveis e de equações.

Estes factos foram observados pela primeira vez por B. Banaschewski e H. Herrlich em [2], e explorados por muitos outros matemáticos entre os quais se contam H. Andréka, I. Németi, I. Sain, J. Adámek, J. Rosický e G. Roşu. Este último é o autor do artigo [7] que inspirou o trabalho desenvolvido em [1], cujos resultados principais são descritos no presente artigo.

Nas Ciências da Computação as lógicas equacional e implicacional têm um papel relevante (veja-se, por exemplo, [3], [9] e [7] e suas referências).

Sugerimos o livro [6] de Saunders Mac Lane para consulta de conceitos e resultados da teoria das categorias.

2 Lógica da injectividade

O primeiro passo para estabelecer uma tal lógica numa categoria abstracta é a substituição da noção de homomorfismo sobrejectivo por uma noção que possa ser definida nesse contexto. Em $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ os homomorfismos sobrejectivos são exactamento os morfismos canceláveis à direita para a composição. Essa é a noção de epimorfismo: f é epimorfismo se

$$g \cdot f = h \cdot f \Rightarrow g = h.$$

Esta noção pode ser definida em qualquer categoria e evidencia uma característica fundamental das definições categoriais: diz-nos como é que o morfismo se relaciona com outros morfismos da categoria.

Salientamos que, mesmo em categorias onde faz sentido falar de morfismos sobrejectivos, eles formam em geral uma subclasse própria da classe dos epimorfismos. Esse é o caso de várias categorias da forma $\mathbf{Alg}(\Sigma, E)$ (e.g. na categoria dos monóides: a imersão do monóide dos naturais no monóide dos inteiros é um epimorfismo) tal como de categorias de conjuntos com um outro tipo de estrutura (e.g. a categoria dos espaços de Hausdorff onde os epimorfismos são as funções contínuas densas).

Numa categoria $\mathcal{A}$, dada uma classe $\mathcal{E} \subseteq Epi(\mathcal{A})$ de epimorfismos, um objecto $A \in \mathcal{A}$ diz-se $\mathcal{E}$-injectivo se é injectivo em relação a f, para todo o $f \in \mathcal{E}$.

Definição 2.1. Numa categoria $\mathcal{A}$

- as *implicações* são epimorfismos;
- um objecto A *satisfaz a implicação* $e : B \to C$ se A é $\{e\}$-injectivo.
- uma subcategoria plena $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ diz-se *implicacional* se existe uma classe $\mathcal{E} \subseteq Epi(\mathcal{A})$ tal que os objectos de $\mathcal{B}$ são exactamente os objectos que satisfazem as implicações de $\mathcal{E}$

As *subcategorias implicacionais* de uma categoria $\mathcal{A}$ são, sob determinadas condições, exactamente as subcategorias fechadas para subobjectos e produtos.

Analogamente, as *subcategorias equacionais* obtêm-se considerando classes $\mathcal{E} \subseteq Epi(\mathcal{A})$ de domínio projectivo, uma noção categorial que substitui a noção de álgebra dos termos numa categoria abstracta. Elas são exactamente, também sob determinadas condições, as subcategorias fechadas para subojectos, produtos e imagens epimórficas.

Em $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ estes tipos de subcategorias são as quasi-variedades e variedades, respectivamente.

Para $\mathcal{E} \cup \{e\} \subseteq Epi(\mathcal{A})$, e diz-se uma *consequência lógica* de $\mathcal{E}$, escrevendo-se

$$\mathcal{E} \models e$$

se todo o objecto de $\mathcal{A}$ é $\{e\}$-injectivo quando é $\mathcal{E}$-injectivo.

Em [7] G. Roşu apresenta um sistema dedutivo que, para esta interpretação, é correcto e completo para epimorfismos finitamente apresentáveis de domínio projectivo, que são as equações neste contexto geral.

A abordagem feita em [1] usa o cálculo das fracções de Gabriel e Zisman ([4]) para obter uma lógica correcta e completa para epimorfismos de domínio e codomínio finitamente apresentáveis, estabelecendo um sistema de dedução semelhante mas com diferenças significativas relativamente ao apresentado em [7].

Definição 2.2. O *Sistema Dedutivo para Epimorfismos (SDE)* é constituído por um axioma e pelas três regras de inferência seguintes:

$$\textit{Axioma :} \qquad \frac{\quad}{id_A}$$

$$\textit{Composição:} \qquad \frac{e,\ e'}{e' \cdot e} \quad \text{se o codomínio de } e \text{ é o domínio de } e'$$

$$\textit{Cancelamento:} \qquad \frac{e' \cdot e}{e}$$

$$\textit{Amalgamento:} \qquad \frac{e}{e'} \quad \text{para toda a soma amalgamada} \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\ \cdot \arrow[r, "e'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

Se $\mathcal{E}$ é uma classe de epimorfismos de uma categoria $\mathcal{A}$, denotamos por

$$\mathcal{E} \vdash e$$

o facto de existir uma prova formal de e a partir de $\mathcal{E}$ usando o SDE, isto é, a existência de epimorfismos $e_1, \cdots, e_n$ tais que $e_n = e$, e, para $i = 1, \cdots, n$, e_i é um morfismo de $\mathcal{E}$, uma identidade, ou a conclusão de uma das regras referidas, estando as premissas entre os epimorfismos $e_1, \cdots, e_{i-1}$.

Proposição 2.3. *O Sistema Dedutivo para Epimorfismos é correcto:*

$$\mathcal{E} \vdash e \ \textit{ implica } \ \mathcal{E} \models e.$$

Demonstração. Basta ver que

- todo o objecto é injectivo relativamente às identidades;
- injectividade relativamente a dois morfismos componíveis e e e' implica injectividade relativamente a $e' \cdot e$;
- injectividade relativamente a $e' \cdot e$ implica injectividade relativamente a e;
- quanto à última regra, se A é $\{e\}$-injectivo e h é um morfismo do domínio de e' para A a injectividade relativamente a e implica a existência de um morfismo s tal que $s \cdot e = h \cdot f$ e a propriedade universal da soma amalgamada dá o morfismo t tal que $t \cdot e' = h$.

□

Mas o Sistema Dedutivo para Epimorfismos, em geral, não é completo, i.e., $\mathcal{E} \models e$ não implica $\mathcal{E} \vdash e$, como a seguir se mostra.

Exemplo 2.4. ([5], 2.11) Consideremos a assinatura Σ constituída por um conjunto numerável de símbolos nulários $c_0, c_1, c_2, \cdots$ e seja $\mathcal{E}$ o conjunto de todos os epimorfismos

$$e_n : I \to I'$$

em **Alg** (Σ), tais que I é a álgebra inicial e o par núcleo de e_n tem uma classe de equivalência $\{c_0^I, \cdots, c_n^I\}$ e todas as outras classes de equivalência são conjuntos singulares.

É fácil ver que uma álgebra A é E-injectiva se e só se todas as constantes em A são iguais. Portanto, o quociente trivial

$$e : I \to 1$$

tem a propriedade

$$\mathcal{E} \models e.$$

Contudo

$$\mathcal{E} \nvdash e.$$

De facto, para um epimorfismo $e' : B \to B'$ com $\mathcal{E} \vdash e'$, o número de pares (i, j) com $c_i^B \neq c_j^B$ mas $c_i^{B'} = c_j^{B'}$ é finito. E isso é falso para o morfismo referido.

Em $\mathbf{Alg}(\Sigma)$, se pretendemos estabelecer um sistema dedutivo completo, é natural considerar epimorfismos na subcategoria plena das álgebras finitamente apresentáveis.

A noção de objecto finitamente apresentável numa categoria arbitrária $\mathcal{A}$ é dada através da noção de colimite filtrante que passamos a definir.

Uma categoria não vazia J diz-se filtrante se

1. para $i, j \in J$ existe um $k \in J$ e morfismos $i \to k$ e $j \to k$ em J;

2. para todo o par de morfismos paralelos $u, v : i \to j$ existe um morfismo w tal que $w \cdot u = w \cdot v$.

Numa categoria $\mathcal{A}$ colimites filtrantes são colimites de diagramas $D : J \to \mathcal{A}$ onde J é uma categoria desse tipo.

Para $A \in \mathbf{Alg}(\Sigma)$ são equivalentes as seguintes condições:

1. A é finitamente apresentável, isto é pode ser descrita por um número finito de geradores e um número finito de equações.

2. A é co-igualizador de um diagrama

$$\Phi(n) \rightrightarrows \Phi(m) \longrightarrow A\,,$$

onde n e m são conjuntos finitos e $\Phi \dashv U$ (1.2.1).

3. $Hom(A, -) : \mathbf{Alg}(\Sigma) \to \mathcal{C}onj$ preserva colimites filtrantes.

Definição 2.5. Numa categoria $\mathcal{A}$ um objecto A diz-se *finitamente apresentável* se $Hom(A, -) : \mathcal{A} \to \mathcal{C}onj$ preserva colimites filtrantes. Denota-se por $\mathcal{A}_{fa}$ a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ constituída pelos objectos finitamente apresentáveis.

Definido objecto finitamente apresentável numa categoria abstracta, obtemos o que pretendíamos: quando a categoria tem colimites (i.e., tem coprodutos e co-igualizadores) e é bem copotenciada (i.e., a menos de isomorfismo existe um conjunto de epimorfismos de domínio fixo), para classes de epimorfismos entre esse tipo de objectos, o Sistema Dedutivo para Epimorfismos é completo.

Teorema 2.6. *Se $\mathcal{A}$ tem colimites e é bem copotenciada, para toda a classe $\mathcal{E} \cup \{e\} \subseteq Epi(\mathcal{A}_{fa})$*

$$\mathcal{E} \models e \text{ implica } \mathcal{E} \vdash e,$$

isto é, o Sistema Dedutivo para Epimorfismos é completo.

Demonstração. Vamos dar apenas uma ideia da demonstração. Seja $\overline{\mathcal{E}}$ a classe de todos os epimorfismos e' em $\mathcal{A}_{fa}$ tais que $\mathcal{E} \vdash e'$ em $\mathcal{A}_{fa}$. A menos de isomorfismo, $\overline{\mathcal{E}}$ é um conjunto. O sistema definido em 2.2 diz-nos que este conjunto de epimorfismos contém todos os morfismos identidade e é fechado para a composição e para somas amalgamadas. Ou seja, $\overline{\mathcal{E}}$ satisfaz o cálculo de fracções (ver [4]). Daqui decorre, através de uma adaptação fácil de um resultado de [5], que todo o objecto em $\mathcal{A}_{fa}$ tem uma reflexão na subcategoria dos objectos $\overline{\mathcal{E}}$-injectivos (veja-se também [8]). Isto significa (1.2.2) que, para cada objecto de $\mathcal{A}_{fa}$, existe um morfismo $r_A : A \to A^*$ com A^* injectivo em relação a $\overline{\mathcal{E}}$ tal que, para qualquer morfismo $f : A \to B$ com B $\overline{\mathcal{E}}$-injectivo, existe um e um só g que satisfaz $g \cdot r_A = f$.

Seguidamente, dado $e : A \to B$ tal que $\mathcal{E} \models e$ em $\mathcal{A}_{fa}$, o facto de A e B serem finitamente apresentáveis é a chave para provar que existe um morfismo e' tal que $\mathcal{E} \vdash e'$ e $e' = h \cdot e$. Daí, pelo Cancelamento em 2.2, vem que $\mathcal{E} \vdash e$. □

3 Lógica das implicações

Seja Σ uma assinatura finitária de uma espécie e seja V um conjunto numerável de variáveis. Nesta secção chamaremos implicação a uma expressão $I \equiv (\mathcal{P} \Rightarrow u = v)$, onde $\mathcal{P}$ é um conjunto finito de equações. Esta é uma forma abreviada de denotar a fórmula de primeira ordem

$$(\forall x_1) \cdots (\forall x_k) \left((\bigwedge_{i=1}^{n} s_i = t_i) \Rightarrow (u = v) \right),$$

onde $x_1, \cdots, x_k$ são as variáveis de V que aparecem na implicação.

Dada uma substituição f, i.e., um homomorfismo $f : Ter_\Sigma(W) \to Ter_\Sigma(W')$, com W, $W' \subseteq V$, seja $\mathcal{P}^f = \{u^f = v^f \ : \ (u = v) \in \mathcal{P}\}$, onde u^f denota o termo $f(u)$, para $u \in Ter_\Sigma(W)$.

Definição 3.1. O *Sistema Dedutivo para Implicações (SDI)* é constituído pelos axiomas e pelas regras de inferência seguintes

Axioma 1: $$\frac{}{\{u = v\} \Rightarrow u = v}$$

Axioma 2: $$\frac{}{\emptyset \Rightarrow u = u}$$

Simetria: $$\frac{\mathcal{P} \Rightarrow u = v}{\mathcal{P} \Rightarrow v = u}$$

Transitividade: $$\frac{\mathcal{P} \Rightarrow u = v, \mathcal{P} \Rightarrow v = w}{\mathcal{P} \Rightarrow u = w}$$

Congruência: $$\frac{\mathcal{P} \Rightarrow u_1 = v_1, \ \ldots, \ \mathcal{P} \Rightarrow u_n = v_n}{\mathcal{P} \Rightarrow \sigma(u_1, \ldots, u_n) = \sigma(v_1, \ldots, v_n)} \quad \text{para todo o } \sigma \in \Sigma_n.$$

Invariância: $$\frac{\mathcal{P} \Rightarrow u = v}{\mathcal{P}^f \Rightarrow u^f = v^f} \quad \text{para toda a substituição } f.$$

Enfraquecimento: $$\frac{\mathcal{P} \Rightarrow u = v}{\mathcal{P} \cup \{u' = v'\} \Rightarrow u = v}$$

Corte: $$\frac{\mathcal{P} \Rightarrow u' = v', \mathcal{P} \cup \{u' = v'\} \Rightarrow u = v}{\mathcal{P} \Rightarrow u = v}$$

Este sistema estende de forma natural o Sistema Dedutivo para o Cálculo Equacional de Birkhoff que é constituído pelo Axioma 2 e pelas quatro primeiras regras de inferência, com $\mathcal{P} = \emptyset$.

Dado um conjunto de implicações $\mathbf{E}$ e uma implicação I temos que

- $\mathbf{E} \models I$ se uma álgebra satisfaz a implicação I quando satisfaz todas as implicações de $\mathbf{E}$;

- $\mathbf{E} \vdash I$ se existe uma prova formal de I a partir de $\mathbf{E}$ usando o Sistema Dedutivo para Implicações.

Teorema 3.2. *O Sistema Dedutivo para Implicações é correcto e completo, isto é, para todo o conjunto $\mathbf{E} \cup \{I\}$ de implicações*

$$\mathbf{E} \models I \textit{ se e só se } \mathbf{E} \vdash I$$

Demonstração. A prova da correcção é simples.

Prova-se que o Sistema Dedutivo para Implicações é completo usando a completude do Sistema Dedutivo para Epimorfismos (Teorema 2.6). Os detalhes técnicos da demonstração podem ser encontrados em [1]. Aqui apresentamos apenas um esquema do caminho percorrido.

Para isso, vamos considerar conjuntos de implicações da forma

$$F = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\},$$

onde $I_i \equiv (\mathcal{P} \Rightarrow u_i = v_i)$, $1 \leq i \leq n$. Dado um tal F, seja $\mathcal{Q} = \{u_i = v_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ e seja $\Phi(W) = Ter_\Sigma(W)$, onde $W \subseteq V$ é um conjunto finito contendo todas as variáveis que aparecem nas implicações $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Denotando por $q_\mathcal{P}$ e q_F os quocientes de $\phi(W)$ em $\phi(W)/\sim_\mathcal{P}$ e $\phi(W)_{\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}}$, respectivamente, designamos por e_F o único epimorfismo para o qual o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \Phi(W) \arrow[dl, "q_\mathcal{P}"'] \arrow[dr, "q_F"] & \\
\Phi(W)/\sim_\mathcal{P} \arrow[rr, "e_F"'] & & \Phi(W)/\sim_{\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}}
\end{tikzcd}$$

é comutativo. No caso em que F se reduz a uma única implicação I, este morfismo é designado por e_I.

Se $\mathbf{E} \models I$ então $\mathcal{E} \models e_I$ sendo

$$\mathcal{E} = \{e_{I'} | I' \in \mathbf{E}\}$$

o conjunto de epimorfismos associado.

Por 2.6,

$$\mathcal{E} \models e_I \text{ implica } \mathcal{E} \vdash e_I$$

e a ideia é provar a partir daí que

$$\mathbf{E} \models I \text{ implica } \mathbf{E} \vdash I,$$

o que se processa da seguinte forma:

1. Para uma implicação I tal que $\mathbf{E} \models I$, existem implicações $I_1, \cdots, I_n \in \mathbf{E}$ tais que
$$\{e_{I_1}, \cdots, e_{I_n}\} \vdash e_I, \tag{2}$$
no SDE.

2. Cada passo da prova de (2) é isomorfo a algum epimorfismo e_F, onde F é um conjunto finito de implicações com antecedente comum, sendo $\{I_1, \cdots, I_n\} \vdash F$ no SDI. (Aqui o termo isomorfo é usado no sentido de que e_1 é isomorfo a e_2 se existem isomorfismos f e g tais que $e_2 \cdot f = g \cdot e_1$.)

3. O morfismo e_I é isomorfo a algum e_F nas condições referidas em 2, sendo que tal isomorfismo implica que $F \vdash I$.

4. Finalmente, se $\{I_1, \cdots, I_n\} \vdash F$ e $F \vdash I$ então $\mathbf{E} \vdash I$.

$\square$

Referências

[1] J. Adámek, M. Sobral e L. Sousa, Logic of Implications, Preprint number 05-24, Pré-Publicações do Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2005 (submetido).

[2] B. Banaschewski e H. Herrlich, Subcategories defined by implications, *Houston Journal of Mathematics 2*, 149-171 (1976).

[3] J. Goguen e J. Meseguer, Completeness of many-sorted equational logic, *Houston Journal of Mathematics*, 1985.

[4] P. Gabriel e M. Zisman, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, Springer, 1967

[5] M. Hébert, J. Adámek e J. Rosický, More on orthogonality in locally presentable categories, *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* 42 (2001), 51-80.

[6] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, 1971.

[7] G. Roşu, Complete categorical equational deduction , In Proceedings of Computer Science Logic (CSL'01), *Lecture Notes in Computer* 2142 (2001), 528-538, Springer.

[8] L. Sousa, Solid hulls of concrete categories, *Appl. Categ. Structures* 3 (1995), 105-118.

[9] W. Wechler, *Universal Algebra for Computer Scientists*, Springer, 1992

Lista de participantes

Maria Cláudia Mendes ***Araújo***, Universidade do Minho
e-mail: *clmendes@math.uminho.pt*

Olga Maria da Silva ***Azenhas***, Universidade de Coimbra
e-mail: *oazenhas@mat.uc.pt*

Patrícia Damas ***Beites***, Universidade da Beira Interior
e-mail: *pbeites@ubi.pt*

Júlia Loureiro Vaz de ***Carvalho***, Universidade Nova de Lisboa
e-mail: *jvc@fct.unl.pt*

Domenico Antonino ***Catalano***, Universidade de Aveiro
e-mail: *domenico@mat.ua.pt*

Paula Machado Cruz ***Catarino***, Univ. de Trás-os-Montes e Alto Douro
e-mail: *pcatarin@utad.pt*

Ana Luísa Rodrigues Branco ***Correia***, Universidade Aberta
e-mail: *matalrbc@univ-ab.pt*

Alfredo Manuel Gouveia ***Costa***, Universidade de Coimbra
e-mail: *amgc@mat.uc.pt*

António Veloso ***Costa***, Universidade do Minho
e-mail: *aveloso@math.uminho.pt*

José Carlos ***Costa***, Universidade do Minho
e-mail: *jcosta@math.uminho.pt*

Glória Maria da Silva Pereira ***Cravo***, Universidade da Madeira
e-mail: *gcravo@uma.pt*

Marija ***Dodig***, Centro de Estruturas Lineares e Combinatórias
e-mail: *dodig@cii.fc.ul.pt*

José Carlos ***Espírito Santo***, Universidade do Minho
e-mail: *jes@math.uminho.pt*

Maria Fernanda ***Estrada***, Centro de Matemática da Univ. do Minho
e-mail: *festrada@math.uminho.pt*

Vítor Hugo ***Fernandes***, Universidade Nova de Lisboa
e-mail: *vhf@fct.unl.pt*

Catarina Isabel J. ***Ferreira***, Universidade do Minho
e-mail: *catarinajeronimo@portugalmail.pt*

Carlos Martins ***Fonseca***, Universidade de Coimbra
e-mail: *cmf@mat.uc.pt*

Emília ***Giraldes***, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
e-mail: *egs@utad.pt*

Catarina Araújo de Santa-Clara ***Gomes***, Universidade de Lisboa
e-mail: *cgomes@ptmat.fc.ul.pt*

Maria Suzana Mendes ***Gonçalves***, Universidade do Minho
e-mail: *smendes@math.uminho.pt*

Ricardo João Rodrigues ***Gonçalves***, Instituto Superior Técnico
e-mail: *rgon@math.ist.utl.pt*

Manuel Messias R. de ***Jesus***, Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa
email: *messias@ptmat.lmc.fc.ul.pt*

Carla Bernardete Delgado ***Josefino***, Esc. EB23 D. Afonso Henriques
email: *carlajosefino@sapo.pt*

Rute Correia ***Lemos***, Universidade de Aveiro
email: *rute@mat.ua.pt*

Samuel António Sousa Dias ***Lopes***, Universidade do Porto
email: *slopes@fc.up.pt*

Ricardo Nuno Fonseca ***Mamede***, Universidade de Coimbra
email: *mamede@mat.uc.pt*

Maria da Graça Rendeiro ***Marques***, Universidade do Algarve
email: *gmarques@ualg.pt*

Maria Paula Mendes ***Martins***, Universidade do Minho
email: *pmendes@math.uminho.pt*

Carla Albertina ***Mendes***, Universidade do Minho
email: *cmendes@math.uminho.pt*

Ana Isabel Pereira ***Moura***, Inst. Sup. Engenharia do Porto
email: *aim@isep.ipp.pt*

Ana Margarida Palma de Carvalho ***Neto***, Universidade Técnica de Lisboa
email: *ananeto@iseg.utl.pt*

Alejandro Piñera ***Nicolás***, Universidade de Lisboa
email: *apnicola@cii.fc.ul.pt*

Conceição Veloso ***Nogueira***, Instituto Politécnico de Leiria
email: *conceicao.nogueira@estg.ipleiria.pt*

Luís António Teixeira de ***Oliveira***, Universidade do Porto
email: *loliveir@fc.up.pt*

Paulo Perames ***Paraíso***, Instituto Politécnico do Porto
email: *ppp@isep.ipp.pt*

Pedro ***Patrício***, Universidade do Minho
email: *pedro@math.uminho.pt*

Luís Filipe ***Pinto***, Universidade do Minho
email: *luis@math.uminho.pt*

Maria Fernanda ***Pinto***, Universidade do Minho
email: *fpinto@math.uminho.pt*

Joana Filipa Amorim ***Pires***, E.S.T.G. Viana do Castelo
email: *joana_amorim@hotmail.pt*

Raquel ***Reis***, Universidade Aberta
email: *raqreis@univ-ab.pt*

Maria Helena C. G. Almeida ***Santos***, Universidade Nova de Lisboa
email: *mhas@fct.unl.pt*

Paulo Manuel ***Saraiva***, Universidade de Coimbra
email: *psaraiva@fe.uc.pt*

Maria do Céu ***Silva***, Universidade do Porto
email: *mcsilva@fc.up.pt*

Pedro Ventura Alves ***Silva***, Universidade do Porto
email: *pvsilva@fc.up.pt*

Maria Paula Marques ***Smith***, Universidade do Minho
email: *psmith@math.uminho.pt*

Maria Manuela O. de S. Antunes ***Sobral***, Universidade de Coimbra
email: *sobral@mat.uc.pt*

Maria Lurdes ***Teixeira***, Universidade do Minho
email: *mlurdes@math.uminho.pt*

João José Neves Silva ***Xarez***, Universidade de Aveiro
email: *jxarez@mat.ua.pt*

Yulin ***Zhang***, Universidade do Minho
email: *zhang@math.uminho.pt*